SESSION 2015

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Opérateur de Volterra

1) Soit $f \in E$. Les fonction $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont définie et de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $(V(f))' = (-V^*(f))' = f$.

Soit $(f, g) \in E^2$. Les deux fonctions $V(f)$ et $-V^*(g)$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\langle V(f), g\rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(f)(x)g(x)\ dx = [V(f)(x)(-V^*(g)(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(-V^*(g)(x))\ dx \\ &= -V(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)V^*(g)\left(\frac{\pi}{2}\right) + V(f)(0)V^*(g)(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)V^*(g)(x)\ dx \\ &= \langle f, V^*(g)\rangle.\end{aligned}$$

V^* est donc l'adjoint de V pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

2) $(V^* \circ V)^* = V^* \circ (V^*)^* = V^* \circ V$ et donc $V^* \circ V$ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit alors $f \in E$.

$$\langle V^* \circ V(f), f\rangle = \langle V^*(V(f)), f\rangle = \langle V(f), V(f)\rangle = \|V(f)\|^2 \geqslant 0.$$

De plus, $\langle V^* \circ V(f), f\rangle = 0 \Leftrightarrow V(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \int_0^x f(t)\ dt = 0$. En dérivant cette dernière égalité, on obtient $f = 0$ et on a donc montré par contraposition que pour $f \in E \setminus \{0\}$, $\langle V^* \circ V(f), f\rangle > 0$. Ainsi, $V^* \circ V$ est un endomorphisme symétrique défini positif.

Soient λ une valeur propre de $V^* \circ V$ puis f un vecteur propre associé. f n'est pas nul et $\langle V^* \circ V(f), f\rangle = \lambda\langle f, f\rangle = \lambda\|f\|^2$ puis

$$\lambda = \frac{\langle V^* \circ V(f), f\rangle}{\|f\|^2} > 0,$$

car $f \neq 0$ et donc $\|f\|^2 > 0$ et $\langle V^* \circ V(f), f\rangle > 0$.

3) f_λ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $V(f_\lambda)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis $V^* \circ V(f_\lambda)$ est de classe C^2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\lambda \neq 0$, on en déduit que $f_\lambda = \frac{1}{\lambda}V^* \circ V(f_\lambda)$ est de classe C^2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En dérivant deux fois l'égalité $f_\lambda = \frac{1}{\lambda}V^* \circ V(f_\lambda)$, on obtient $f_\lambda' = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)$ puis $f_\lambda'' = -\frac{1}{\lambda}f_\lambda$ et donc

$$f_\lambda'' + \frac{1}{\lambda}f_\lambda = 0.$$

De plus, $f_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V(f)(x)\ dx = 0$ et $f_\lambda'(0) = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)(0) = 0$.

4) Les solutions sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Les conditions $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'(0) = 0$ s'écrivent $\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ et $\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} = 0$ ou encore $\beta = 0$ et $\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$.

Or, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}/ \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2n+1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/ \lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

1 er cas. Si λ n'est pas de la forme $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, le système précédent admet l'unique solution $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ ou encore le problème $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'(0) = 0$ admet l'unique solution $y = 0$ ou enfin il n'existe pas de fonctions non nulle $f \in E$ telle que $V^* \circ V(f) = \lambda f$. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de $V^* \circ V$.

2 ème cas. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Les fonctions solutions du problème $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'(0) = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha\cos((2n+1)x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ou encore si f est un élément de E tel que $V^* \circ V(f) = \dfrac{1}{(2n+1)^2}f$, nécessairement il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha\cos((2n+1)x)$.

Réciproquement, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = \cos((2n+1)x)$. Alors, pour tout réel x, $V(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos((2n+1)t)\ dt = \dfrac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)$ puis

$$V^*(V(f))(x) = \frac{1}{2n+1}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\ dt = \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

Donc, f_n est un élément non nul de E vérifiant $V^* \circ V(f_n) = \dfrac{1}{(2n+1)^2}f_n$ ce qui montre que $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est valeur propre de $V^* \circ V$.

On a montré que les valeurs propres de $V^* \circ V$ sont les $\lambda_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Le sous-espace propre associé à λ_n est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_n)$ où f_n est la fonction $x \mapsto \cos((2n+1)x)$.

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

5) On sait que S_n suit $\mathscr{B}(n, x)$ la loi binomiale de paramètres n et x.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $E(X_i) = 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1) = 0(1-x) + 1 \times x = x$ et

$$V(X_i) = E\left(X_i^2\right) - (E(X_i))^2 = 0^2P(X_i = 0) + 1^2P(X_i = 1) - x^2 = x - x^2 = x(1-x).$$

L'espérance est linéaire. Donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nx$. D'autre part, puisque les variables X_i sont mutuellement indépendantes,

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nx(1-x).$$

On a montré que l'espérance de S_n est nx et la variance de S_n est $nx(1-x)$.

6) La loi de S_n est : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(S_n = k) = \dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Donc, pour $\alpha > 0$,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = P(|Z_n - x| \geqslant \alpha).$$

L'espérance de Z_n est $E(Z_n) = \dfrac{E(S_n)}{n} = x$ et la variance de Z_n est $V(Z_n) = \dfrac{V(S_n)}{n^2} = \dfrac{x(1-x)}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = P(|Z_n - x| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Enfin, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. Finalement,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = P(|Z_n - x| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

7) Soit $x \in [0,1]$. $f(x) = f(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(x)$. D'autre part, d'après un théorème de transfert,

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) = E(f(Z_n)) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

et finalement, $B_n(f)(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, f étant continue sur le segment $[0,1]$, f est bornée sur ce segment. Soit alors $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)|\right) + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc, il existe un entier naturel non nul n_0, indépendant de x, tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, et pour tout $x \in [0,1]$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ et donc que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} \cos^n t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{it}\right)^{n-k}\left(e^{-it}\right)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)t} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}} \left(\binom{n}{k} e^{i(n-2k)t} + \binom{n}{n-k} e^{i(n-2(n-k))t}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}} \binom{n}{k}\left(e^{i(n-2k)t} + e^{-i(n-2k)t}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}} \binom{n}{k}\cos((n-2k)t). \end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$, on a $0 \leqslant n - 2k \leqslant n$ et donc la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est un élément de F_n.

Plus généralement, pour tout $k \in\mapsto [\![0,n]\!]$, la fonction $t \mapsto \cos^k(t)$ est un élément de F_k et donc de F_n. Puisque F_n est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces fonctions est encore un élément de F_n et en particulier, si p est un polynôme de degré n, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ est un élément de F_n.

9) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. $\langle c_n, c_p\rangle = \displaystyle\int_0^\pi \cos(nt)\cos(pt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(n+p)t) + \cos((n-p)t))\ dt$.

1 er cas. Si $n \neq p$, alors $n - p \neq 0$ et d'autre part, $n + p \neq 0$ car $n + p \geqslant 1 + 0 > 0$. Dans ce cas,

$$\langle c_n, c_p \rangle_G = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)t)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)t)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0.$$

2 ème cas. Si $n = p \neq 0$, alors $n + p = 2n \neq 0$ et donc

$$\langle c_n, c_p \rangle_G = \langle c_n, c_n \rangle_G = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2n)t))\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 ème cas. Si $n = p = 0$, alors

$$\langle c_n, c_p \rangle_G = \langle c_0, c_0 \rangle_G = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

D'après les calculs précédents, la famille $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée où $\alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\forall n \geqslant 1$, $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

Soit f un élément de G. Soit $g = f \circ \text{Arccos}$. Arccos est continue sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[0, \pi]$ et f est continue sur $[0, \pi]$. Donc, g est continue sur $[-1, 1]$. D'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $[-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = p_n \circ \cos$ de sorte que $p_n = P_n \circ \text{Arccos}$. Puisque Arccos est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$,

$$\{|f(t) - P_n(t)|,\ t \in [0, \pi]\} = \{|f(\text{Arccos}(x)) - P_n(\text{Arccos}(x))|,\ x \in [-1, 1]\} = \{|g(x) - p_n(x)|,\ x \in [-1, 1]\}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $\|f - P_n\|_\infty = \sup\{|f(t) - P_n(t)|,\ t \in [0, \pi]\} = \sup\{|g(x) - p_n(x)|,\ x \in [-1, 1]\}$ puis que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, \pi]$.

Posons $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \text{Vect}\,(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \text{Vect}\,(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la question 8), chaque P_n est un élément de F et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. Maintenant

$$\|f - P_n\|_G = \sqrt{\int_0^{\pi} (f(x) - P_n(x))^2\,dx} \leqslant \sqrt{\pi}\,\|f - P_n\|_\infty,$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_G = 0$. On a ainsi trouvé une suite d'éléments de $\text{Vect}\,(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers f pour $\|\ \|_G$. F est donc dense dans l'espace $(G, \|\ \|_G)$ ou encore la famille orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

10) Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et un élément f_{n_0} de F_{n_0} tel que $\|f - f_{n_0}\|_G \leqslant \varepsilon$. On sait alors que $\left\|f - P_{F_{n_0}}(f)\right\|_G \leqslant \|f - f_{n_0}\|_G \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $F_{n_0} \subset F_n$ et donc que $P_{F_{n_0}}(f) \in F_n$, $\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leqslant \left\|f - P_{F_{n_0}}(f)\right\|_G \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0$, $\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leqslant \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - P_{F_n}(f)\|_G = 0$.

Supposons de plus que la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction g. g est continue sur $[0, \pi]$ en tant que limite uniforme sur $[0, \pi]$ d'une suite de fonctions continues sur $[0, \pi]$ ou encore g est un élément de G.

Pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant \|f - g\|_G \leqslant \|f - P_n(f)\|_G + \|P_n(f) - g\|_G \leqslant \|f - P_n(f)\|_G + \sqrt{\pi}\|P_n(f) - g\|_\infty.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|f - g\|_G = 0$ et donc $f = g$.

11) Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La famille $(\alpha_k c_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de F_n. Donc

$$P_{F_n}(g_x) = \sum_{k=0}^{n} \langle g_x, \alpha_k c_k \rangle_G \alpha_k c_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \langle g_x, c_k \rangle_G c_k.$$

Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\langle g_x, c_p \rangle_G &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\cos(pt)\ dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_x(\pi - t)\cos(pt)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\cos(pt)\ dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} g_x(u)\cos(p(\pi - u))\ (-du)\ \text{(en posant } u = \pi - t) \\
&= (1 - (-1)^p)\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\cos(pt)\ dt
\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que si p est pair, $\langle g_x, c_p\rangle_G = 0$. Posons $p = 2k+1$ où k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle g_x, c_p\rangle_G &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) \cos((2k+1)t)\ dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos((2k+1)t)\ dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos((2k+1)t)\ dt \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} + \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}\right]_x^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k+1} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2k+1)t)\ dt \\
&= \frac{1}{(2k+1)^2} \left(-\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)) + \cos((2k+1)x)\right) = \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

puis $\alpha_{2k+1}^2 \langle g_x, c_p\rangle_G = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{F_n}(g_x) = \frac{4}{\pi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} c_{2k+1}.$$

D'après la question 10), $\|g_x - P_{F_n}(g_x)\|_G$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Vérifions que la suite $(P_{F_n}(g_x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une certaine fonction g.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t de $[0,\pi]$, $\left|\dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme générale $t \mapsto \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,\pi]$. Il revient au même de dire que la suite $(P_{F_n}(g_x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et en particulier simplement sur $[0,\pi]$ vers une certaine fonction g.

D'après la question 10), $g = g_x$ et on a donc montré que $\forall (x,t) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$, $\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t) = g_x(t)$. En particulier,

$$\forall (x,t) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2,\ \frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t).$$

12) Soit $f \in E$. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\ dt = \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(t)\ dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\ dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ dt - xV(f)(x) - V^*(xf)(x).$$

Puisque f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $G\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\ dt$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$G'(x) = -V(f)(x) - xf(x) + xf(x) = -V(f)(x).$$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction $-V(f)$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de même que la fonction $V^* \circ V(f)$. On en déduit que pour tout réel x,

$$G(x) = V^* \circ V(f)(x) + G(0) - V^* \circ V(f)(0).$$

Or $G(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t)\ dt$ et, d'autre part, à l'aide d'une intégration par parties licite,

$$\begin{aligned}
V^* \circ V(f)(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(f)(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x f(t)\ dt\right)\ dx \\
&= \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \int_0^x f(t)\ dt\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x)\ dx = G(0).
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)f(t)\ dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)\right) f(t)\ dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{(2n+1)^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. La série de fonctions de terme général $t \mapsto \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos((2n+1)t)\ dt\right)\cos((2n+1)x).$$

Les nombres $a_n(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos((2n+1)t)\ dt$ conviennent.

D. Equations différentielles du type Sturm-Liouville

13) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4), $V^* \circ V(\varphi_n) = \frac{1}{(2n+1)^2}\varphi_n$. Donc, d'après la question 1),

$$\langle V^* \circ V(f), \varphi_n\rangle = \langle V(f), V(\varphi_n)\rangle = \langle V(f), V^* \circ V(\varphi_n)\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle f, \varphi_n\rangle.$$

14) • Supposons que g soit solution de S sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g'(x) = g'(x) - g'(0) = \int_0^x (-\lambda g(t) - h(t))\ dt = -\lambda V(f)(x) - V(h(x)),$$

puis

$$g(x) = g(x) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_x^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\ dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}} (\lambda V(f)(t) + V(h(t)))\ dt = \lambda V^* \circ V(g)(x) + V^* \circ V(h)(x),$$

et donc $g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$.

• Supposons que $g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$. On a vu à la question 1) que $V^* \circ V(g)$ est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $(V^* \circ V(g))' = -V(g)$ puis $(V^* \circ V(g))'' = -g$. De même, $V^* \circ V(h)$ est deux fois dérivable de dérivée seconde $-h$. Donc , g est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $g'' = -\lambda g - h$ ou encore $g'' + \lambda g + h = 0$.

Ensuite, $V^* \circ V(g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(f)(t)\ dt = 0 = V^* \circ V(h)$ et donc $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
De même, $g'(0) = -\lambda V(g)(0) - V(h)(0) = 0$ et donc g est solution de S sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 13)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n+1)^2}\langle h, \varphi_n\rangle &= \langle V^* \circ V(h), \varphi_n\rangle = \langle g - \lambda V^* \circ V(g), \varphi_n\rangle = \langle g, \varphi_n\rangle - \lambda\langle V^* \circ V(g), \varphi_n\rangle \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)\langle g, \varphi_n\rangle.\end{aligned}$$

• D'après la question 12),

$$\begin{aligned}g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h) &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(h) \times \frac{\pi}{2}\varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\lambda a_n(g) + a_n(h))\,\varphi_n.\end{aligned}$$

Maintenant, $a_n(g) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos((2n+1)t)\ dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\langle g, \varphi_n\rangle$ et de même $a_n(h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\langle g, \varphi_n\rangle$.
Donc,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\lambda a_n(g)+a_n(h)\right)=\frac{\lambda}{(2n+1)^2}\langle g,\varphi_n\rangle+\frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle=\langle g,\varphi_n\rangle.$$

Finalement, $g=\sum_{n=0}^{+\infty}\langle g,\varphi_n\rangle\varphi_n$.

15) Pour tout entier naturel n et pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{|(2n+1)^2-\lambda|}\|h\|\times\|\varphi_n\|\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}=\frac{2\|h\|}{\sqrt{\pi}|(2n+1)^2-\lambda|}$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Puisque la série numérique de terme général $\frac{2\|h\|}{\sqrt{\pi}|(2n+1)^2-\lambda|}$ converge, la série de fonctions de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

La question précédente montre que nécessairement, si g est solution de S, alors pour tout entier naturel n, $\langle g,\varphi_n\rangle=\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}$ puis que

$$g=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}\varphi_n.$$

Ainsi, S a au plus une solution à savoir $g=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}\varphi_n$.

Réciproquement, soit $g=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}\varphi_n$. Puisque la série de fonctions $\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}\varphi_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que chaque fonction φ_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, g est définie et continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $a_n(h)=\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(t)\cos((2n+1)t)\ dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle$. D'autre part, puisque pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos((2n+1)t)|\leqslant 1$, la série de fonctions de terme général $t\mapsto\frac{\langle h,\varphi_p\rangle}{(2p+1)^2-\lambda}\varphi_p(t)\cos((2n+1)t)$, $p\in\mathbb{N}$, est encore normalement convergente et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}
a_n(g)&=\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos((2n+1)t)\ dt=\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_p\rangle}{(2p+1)^2-\lambda}\varphi_p(t)\right)\cos((2n+1)t)\ dt\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_p\rangle}{(2p+1)^2-\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_p(t)\cos((2n+1)t)\ dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_p\rangle}{(2p+1)^2-\lambda}\langle\varphi_p,\varphi_n\rangle\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_p\rangle}{(2p+1)^2-\lambda}\delta_{n,p}=\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\lambda V^*\circ V(g)+V^*\circ V(h)&=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(g)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi_n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(h)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi_n\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lambda\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}+\frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi_n\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{(2n+1)^2-\lambda}+1\right)\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2}\varphi_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle h,\varphi_n\rangle}{(2n+1)^2-\lambda}\varphi_n\\
&=g
\end{aligned}$$

et donc g est l'unique solution de S.

16) Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$. D'après la question 14), on doit avoir $\dfrac{1}{(2p+1)^2}\langle h, \varphi_p\rangle = \left(1 - \dfrac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2}\right)\langle g, \varphi_p\rangle = 0$. Donc, si $\langle h, \varphi_p\rangle \neq 0$, S n'a pas de solution.

Si $\langle h, \varphi_p\rangle = 0$, soit $g = \displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq p}} \dfrac{\langle h, \varphi_n\rangle}{(2n+1)^2 - \lambda}\varphi_n$. Un raisonnement analogue à celui de la question 15) montre que g est solution de S. D'autre part, la fonction φ_p est solution de l'équation homogène $y'' + (2p+1)^2 y = 0$ et vérifie de plus $\varphi_p\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \varphi_p'(0) = 0$. Donc, les fonctions de la forme $C\varphi_p + \displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq p}} \dfrac{\langle h, \varphi_n\rangle}{(2n+1)^2 - \lambda}\varphi_n$, $C \in \mathbb{R}$, sont des solutions de S. S admet une infinité de solutions.

