SESSION 2013

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Formes bilinéaires symétriques plates

1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. L'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. D'après l'isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual, on sait qu'il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^n$, dépendant de x et que l'on note donc $u(x)$, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y) = \langle u(x), y\rangle$. On a ainsi uniquement défini une application u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Vérifions que u est linéaire. Soient $(x, x') \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout y de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\langle u(\lambda x + \mu x'), y\rangle = \varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x, t) + \mu\varphi(x', y) = \lambda\langle u(x), y\rangle + \mu\langle u(x'), y\rangle \\ = \langle \lambda u(x) + \mu u(x'), y\rangle.\end{aligned}$$

Par suite, pour tout y de $\mathbb{R}^n$, $\langle u(\lambda x + \mu x') - \lambda u(x) - \mu u(x'), y\rangle = 0$ et donc $u(\lambda x + \mu x') - \lambda u(x) - \mu u(x') \in (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$. On en déduit que $u(\lambda x + \mu x') = \lambda u(x) + \mu u(x')$.

L'application u est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u(y), x\rangle = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = \langle u(x), y\rangle.$$

Par suite, u est symétrique. D'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Pour $i \neq j$,

$$\varphi(e_i, e_j) - = \langle u(e_i), e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

Ceci montre que φ est diagonalisable.

2) $(x, y) \mapsto a(x) \otimes b(y)$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et donc est bilinéaire.

$a \otimes b$ est symétrique si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $a(x)b(y) = a(y)b(x)$. Cette condition est en particulier réalisée si a est nulle. Supposons dorénavant $a \neq 0$. Il existe $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $a(y_0) \neq 0$.

$$a \otimes b \text{ symétrique} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ a(x)b(y_0) = a(y_0)b(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ b(x) = \frac{b(y_0)}{a(y_0)}a(x) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ b = \lambda a.$$

Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = \lambda a$, alors pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$a \otimes b(y, x) = a(y)b(x) = \lambda a(x)a(y) = a(x)b(y) = \varphi(x, y),$$

et donc $a \otimes b$ est symétrique. En résumé, $a \otimes b$ est symétrique si et seulement si $a = 0$ ou il existe λ tel que $b = \lambda a$ ou encore

$$\boxed{a \otimes b \text{ est symétrique si et seulement si } (a, b) \text{ est liée.}}$$

3) D'après la question 1), φ est diagonalisable. Soit $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de diagonalisation de φ. La matrice $\left(\varphi(e'_i, e'_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est alors une matrice diagonale de rang 1. Quite à renuméroter les vecteurs e'_i, on peut supposer que cette matrice s'écrit $\text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$ avec λ réel non nul.

Soit $\mathscr{B} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}}e_1, e_2, \dots, e_n\right)$. $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de φ dans $\mathscr{B}$ est $\text{diag}(\pm 1, 0, \dots, 0)$. Pour tout $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et tout $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_j\varphi(e_i,e_j)=\pm x_1y_1=\pm e_1^*(x)e_1^*(y).$$

Donc, $\varphi=\pm e_1^*\otimes e_1^*$. Par suite, il existe $\varepsilon\in\{-1,1\}$ et $f\in\mathbb{R}^{n*}$ tels que $\varphi=\varepsilon f\otimes f$.

4) Soient $(x,y,z,w)\in(\mathbb{R}^n)^4$.

$$\langle\varphi(x,y),\varphi(z,w)\rangle=\varphi(x,y),\varphi(z,w)=\varepsilon f(x)f(y)\varepsilon f(z)f(w)=f(x)f(y)f(z)f(w)=\varphi(x,w)\varphi(z,y)=\langle\varphi(x,w),\varphi(z,y)\rangle.$$

Ainsi, φ est plate.

5) Soit φ une forme bilinéaire symétrique plate non nulle. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de diagonalisation de φ. La matrice $(\varphi(e_i,e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de la forme $\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

S'il existe deux indices i et j distincts tels que $\lambda_i\neq 0$ et $\lambda_j\neq 0$ alors
- $\langle\varphi(e_i,e_i),\varphi(e_j,e_j)\rangle=\varphi(e_i,e_i),\varphi(e_j,e_j)=\lambda_i\lambda_j\neq 0$,
- $\langle\varphi(e_i,e_j),\varphi(e_j,e_i)\rangle=\varphi(e_i,e_j),\varphi(e_j,e_i)=0$.

Donc, φ n'est pas plate.

Par contraposition, si φ est plate, au plus un des λ_i est non nul puis exactement un des λ_i est non nul car φ est non nulle. Finalement, φ est de rang 1.

B. Diagonalisation simultanée

6) Si l'un des sous-espaces propres de u_{i_0}, noté $E_\lambda(u)$, est de dimension n, alors $E=\text{Ker}\,(u_{i_0}-\lambda\text{Id})$ et donc $u_{i_0}=\lambda\text{Id}$ ce qui n'est pas. Donc, tous les sous-espaces propres de u_{i_0} sont de dimension strictement inférieures à n.

Soit $i\in I$. Puisque u_i commute avec u_{i_0}, on sait que les sous-espaces propres de u_{i_0} sont stables par u_i. Redémontrons-le. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ puis $x\in\text{Ker}\,(u_{i_0}-\lambda\text{Id})$.

$$(u_{i_0}-\lambda\text{Id})\,(u_i(x))=u_{i_0}(u_i(x))-\lambda u_i(x)=u_i(i_{i_0}(x))-\lambda u_i(x)=u_i\left((u_{i_0}-\lambda\text{Id})(x)\right)=u_i(0)=0.$$

7) Si tous les u_i, $i\in I$, sont des homothéties, alors toute base de $\mathbb{R}^n$ est une base de diagonalisation simultanée des u_i, $i\in I$.

Sinon, il existe $i_0\in I$ tel que u_{i_0} n'est pas une homothétie. u_{i_0} est diagonalisable d'après le théorème spectral. D'après la question précédente, u_{i_0} admet au moins deux sous-espaces propres, tous de dimension strictement inférieure à n. De plus, ces sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
Soit E_λ l'un de ces sous-espaces propres. Les u_i, $i\in I$, laissent stable E_λ et donc leurs restrictions à E_λ induisent des endomorphismes de E_λ. Puisque $\dim(E_\lambda)<n$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer qu'il existe une base $\mathscr{B}_\lambda$ de E_λ diagonalisant simultanément tous les u_i, $i\in I$.

La réunion des $\mathscr{B}_\lambda$, $\lambda\in\text{Sp}(u_{i_0})$, est une base de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant simultanément tous les u_i, $i\in I$. Le résultat est démontré par récurrence.

C. Vecteurs réguliers

8) Pour $t\in\mathbb{R}$, posons $P(t)=\det(A+tB)$. P est un polynôme.
- Si A est inversible, $P(0)\neq 0$ et donc P n'est pas le polynôme nul et admet donc un nombre fini de racines. Par suite, $A+tB$ est inversible pour tout $t\in\mathbb{R}$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de t.
- Si B est inversible, pour tout réel t, $P(t)=\det(B)\times\det\left(AB^{-1}+tI_n\right)=\det(B)\chi_{AB^{-1}}(-t)$. Dans ce cas aussi, P est un polynôme non nul et donc $A+tB$ est inversible pour tout $t\in\mathbb{R}$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de t.

9) Soit $(a_1,\ldots,a_r)$ une famille libre de $\mathbb{R}^p$. On a donc $r\leqslant p$. On peut compléter la famille $(a_1,\ldots,a_r)$ en $(a_1,\ldots,a_p)$ base de $\mathbb{R}^p$. On note A la matrice de la famille $(a_1,\ldots,a_p)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$.

On complète aussi la famille $(b_1,\ldots,b_r)$ en $\left(\underbrace{b_1,\ldots,b_r,0,\ldots,0}_{p\text{ vecteurs}}\right)$. On note B la matrice de la famille $\left(\underbrace{b_1,\ldots,b_r,0,\ldots,0}_{p\text{ vecteurs}}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

La matrice A est inversible et donc la matrice $A+tB$ est inversible pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t. On en déduit que la famille $\left(\underbrace{a_1+tb_1,\ldots,a_r+tb_r,a_{r+1},\ldots,a_p}_{p\text{ vecteurs}}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ pour tout réel

t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t. En particulier, la famille $(a_1+tb_1,\dots,a_r+tb_r)$ est libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.
10) Soient $x\in\mathbb{R}^n$ et $y\in\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)$. Par suite, $\widetilde{\varphi}(v)(y)=\varphi(v,y)=0$.

Par hypothèse, $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$ est de dimension q et $q\geqslant 1$ car φ n'est pas nulle. Par suite, il existe des vecteurs e_1, e_2,...,e_q tels que $(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q))$ soit une base de $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$.
Supposons par l'absurde que $\varphi(x,y)\notin\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$. Alors la famille $(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q),\varphi(x,y))$ est libre. D'après la question 9), il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout réel t non nul de V, la famille

$$(\varphi(v,e_1)+t\varphi(x,e_1),\dots,\varphi(v,e_q)+t\varphi(x,e_q),\varphi(x,y)+t.0)=(\varphi(v+tx,e_1),\dots,\varphi(v+tx,e_q),\varphi(x,y))$$

soit libre. Puisque $\varphi(v,y)=0$, pour t_0 non nul donné dans V, la famille

$$\left(\varphi(v+t_0x,e_1),\dots,\varphi(v+t_0x,e_q),\varphi(x,y)+\frac{1}{t_0}\varphi(v,y)\right)=\left(\varphi(v+t_0x,e_1),\dots,\varphi(v+t_0x,e_q),\varphi\left(\frac{1}{t_0}(v+t_0x),y\right)\right)$$

est libre. Puisque t_0 n'est pas nul, la famille

$$\left(\varphi(v+t_0x,e_1),\dots,\varphi(v+t_0x,e_q),t_0\varphi\left(\frac{1}{t_0}(v+t_0x),y\right)\right)=(\varphi(v+t_0x,e_1),\dots,\varphi(v+t_0x,e_q),\varphi(v+t_0x,y))$$

est libre. Par suite, $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v+t_0x)$ est de dimension au moins égale à $q+1$ ce qui contredit le caractère maximal de v. On a montré par l'absurde que $\varphi(x,y)\in\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$.

11) Soit $y\in\mathbb{R}^n$. Si $y\in\mathrm{Ker}\varphi$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=0$. En particulier, $\widetilde{\varphi}(v)(y)=\varphi(v,y)=0$ et donc $y\in\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)$.

Réciproquement, soient $x\in\mathbb{R}^n$ et $y\in\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)$. D'après la question $\varphi(x,y)\in\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$. Par suite, il existe $y_0\in\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x,y)=\varphi(v,y_0)$.
La forme linéaire φ est plate et donc

$$\|\varphi(x,y)\|^2=\langle\varphi(x,y),\varphi(v,y_0)\rangle=\langle\varphi(x,y_0),\varphi(v,y)\rangle=\langle\varphi(x,y_0),0\rangle=0.$$

Par suite, $\varphi(x,y)\in\mathrm{Ker}\varphi$. On a montré que $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)\subset\mathrm{Ker}\varphi$ et finalement que $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)=\mathrm{Ker}\varphi$.

Supposons de plus $\mathrm{Ker}\varphi\{0\}$. Alors, $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)=\{0\}$. Comme $\widetilde{\varphi}(v)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, le théorème du rang permet d'affirmer que

$$p\geqslant\dim(\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v))=n-\dim(\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v))=n.$$

Ceci montre que si φ est une application bilinéaire symétrique plate de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de noyau nul, alors $p\geqslant n$.

12) Soit $v\in\mathscr{V}$. Alors $\dim(\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v))=q$. Soit $(e_1,\dots,e_q)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que la famille $(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q))$ soit une base de $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$.
On complète éventuellement la famille libre $(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(x,e_q))$ en $\mathscr{B}=\left(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q),e'_{q+1},\dots,e'_p\right)$ de $\mathbb{R}^p$.

Considérons l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n&\to&\mathbb{R}\\ w&\mapsto&\det_{\mathscr{B}}\left(\varphi(w,e_1),\dots,\varphi(w,e_q),e'_{q+1},\dots,e'_p\right)\end{array}$. f est continue sur $\mathbb{R}^n$ par continuité du déterminant et par le fait qu'une application linéaire ou multilinéaire sur un espace de dimension finie est continue.
Comme $f(v)=1\neq0$, il existe un voisinage V de v tel que pour tout $w\in V$, $\det_{\mathscr{B}}\left(\varphi(w,e_1),\dots,\varphi(w,e_q),e'_{q+1},\dots,e'_p\right)$.
Pour $w\in V$, la famille $\left(\varphi(w,e_1),\dots,\varphi(w,e_q),e'_{q+1},\dots,e'_p\right)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et en particulier, la famille $(\varphi(w,e_1),\dots,\varphi(w,e_q))$ est libre. Par suite, pour tout $w\in V$, $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(w)$ est de dimension au moins égale à q puis exactement égale à q ou encore $w\in\mathscr{V}$.

On a montré que pour tout $v\in\mathscr{V}$, il existe un voisinage V de v tel que $V\subset\mathscr{V}$ et donc que $\mathscr{V}$ est ouvert.

13) Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon>0$. Soit $v\in\mathscr{V}$. Comme à la question précédente, soit $(e_1,\dots,e_q)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que la famille $(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q))$.

D'après la question 9), la famille

$$(\varphi(v,e_1)+t\varphi(x,e_1),\dots,\varphi(v,e_q)+t\varphi(x,e_q))=(\varphi(v+tx,e_1),\dots,\varphi(v+tx,e_q))$$

est libre pour tout t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t. Mais alors, pour tout t non nul sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t, la famille

$$\left(\frac{1}{t}\varphi(v+tx,e_1),\dots,\frac{1}{t}\varphi(v+tx,e_q)\right)=\left(\varphi\left(\frac{1}{t}v+x,e_1\right),\dots,\varphi\left(\frac{1}{t}v+x,e_q\right)\right)$$

est libre. Puisque $\left]\frac{\|v\|}{\varepsilon},+\infty\right[$ est infini, on peut choisir le réel t dans l'intervalle $\left]\frac{\|v\|}{\varepsilon},+\infty\right[$ (v étant bien sûr non nul). Soit t_0 un tel réel. Alors, la famille $\left(\varphi\left(\frac{1}{t_0}v+x,e_1\right),\dots,\varphi\left(\frac{1}{t_0}v+x,e_q\right)\right)$ est libre ou encore le vecteur $\frac{1}{t_0}v+x$ est dans $\mathscr{V}$. De plus

$$\left\|\left(\frac{1}{t_0}v+x\right)-x\right\|=\frac{1}{t_0}\|v\|<\varepsilon.$$

On a montré que $\mathscr{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p=n$ de noyau nul

14) Puisque φ est une application bilinéaire symétrique plate et que v est régulier pour φ, la question 11) permet d'affirmer que $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}(v)=\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$. Ainsi, $\widetilde{\varphi}(v)$ est un endomorphisme injectif de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$ et donc un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On est donc dans le cas où $p=n=q$.

15) Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Soient y et z deux élément de $\mathbb{R}^n$. Soit $z'=\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(z)$.

$$\begin{aligned}\langle\psi(x)(y),z\rangle&=\langle\widetilde{\varphi}(x)\left(\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(y)\right),\widetilde{\varphi}(v)(z')\rangle=\langle\varphi\left(x,\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(y)\right),\varphi(v,z')\rangle\\&=\langle\varphi\left(x,z'\right),\varphi\left(v,\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(y)\right)\rangle\text{ (car }\varphi\text{ est une forme plate)}\\&=\langle\varphi\left(x,\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(z)\right),\widetilde{\varphi}(v)\circ\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(y)\rangle=\langle\widetilde{\varphi}(x)\circ\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(z),y\rangle\\&=\langle\psi(x)(z),y\rangle.\end{aligned}$$

Donc, $\psi(x)$ est un automorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^n$.

16) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soient z et w deux éléments de $\mathbb{R}^n$. En posant $z'=(\widetilde{\varphi}(v))^{-1}(z)$ et $w'=(\widetilde{\varphi}(v))^{-1}(w)$

$$\begin{aligned}\langle(\psi(x)\circ\psi(y))(z),w\rangle&=\langle\psi(y)(z),\psi(x)(w)\rangle\text{ (car }\psi(x)\text{ est auto-adjoint)}\\&=\langle\varphi(y,z'),\varphi(x,w')\rangle\\&=\langle\varphi(y,w'),\varphi(x,z')\rangle\\&=\langle(\psi(y)\circ\psi(x))(z),w\rangle\text{ (les rôles de }x\text{ et }y\text{ ayant été échangés)}\end{aligned}$$

Donc, z étant fixé, pour tout w de $\mathbb{R}^n$, $\langle(\psi(x)\circ\psi(y))(z)-(\psi(y)\circ\psi(x))(z),w\rangle=0$ et donc $\psi(x)\circ\psi(y))(z)-(\psi(y)\circ\psi(x))(z)\in(\mathbb{R}^n)^\perp=\{0\}$. Ceci étant vrai pour tout z de $\mathbb{R}^n$, on a montré que $\psi(x)\circ\psi(y)=\psi(y)\circ\psi(x)$.

Ainsi, les $\psi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, sont des endomorphismes autoadjoints de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux. La question 7) permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ diagonalisant simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

17) Pour $1\leqslant i\leqslant n$, posons $e'_i=\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(e_i)$. La famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est l'image de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ par l'automorphisme $\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}$. Donc la famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Pour chaque $j\in[\![1,n]\!]$, pour chaque i de $[\![1,n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre de l'endomorphisme autoadjoint $\psi(e'_j)$. Par suite, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, il existe $\lambda_{i,j}\in\mathbb{R}$ tel que $\psi(e'_j)(e_i)=\lambda_{i,j}e_i$. Mais alors, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$\lambda_{i,j}e_i=\psi(e'_j)(e_i)=\widetilde{\varphi}(e'_j)\circ\left(\widetilde{\varphi}(v)\right)^{-1}(e_i)=\widetilde{\varphi}(e'_j)(e'_i)=\varphi\left(e'_j,e'_i\right).$$

Par symétrie de φ et en échangeant les rôles de i et j, on a aussi

$$\varphi\left(e'_j,e'_i\right)=\varphi\left(e'_i,e'_j\right)=\lambda_{j,i}e_j.$$

Supposons de plus $i\neq j$. Puisque la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, l'égalité

$$\lambda_{i,j}e_i-\lambda_{j,i}e_j=0$$

impose $\lambda_{i,j}=\lambda_{j,i}=0$ et donc $\varphi\left(e_i,e_j\right)=0$. Ainsi, la base $(e'_1,\dots,e_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise φ.

