SESSION 2012

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PC

---

1 Un problème aux valeurs propres

Question 1 Soit v une solution de (5)-(6). Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, v est de classe C^n sur $[0, \pi]$.

• v est deux dérivable sur $[0, \pi]$ et en particulier de classe C^0 sur $[0, \pi]$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que v soit de classe C^n sur $[0, \pi]$. Alors, $v'' = -\lambda v$ est de classe C^n sur $[0, \pi]$ ou encore v est de classe C^{n+2} sur $[0, \pi]$. En particulier v est de classe C^{n+1} sur $[0, \pi]$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, v est de classe C^n sur $[0, \pi]$ et donc v est de classe C^∞ sur $[0, \pi]$ et en particulier sur $]0, \pi[$.

Soit v une solution de (5)-(6). Les deux fonctions v' et v sont de classe C^1 sur le segment $[0, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^\pi v''(x)v(x)\ dx = [v'(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (v'(x))^2\ dx = v'(\pi)v(\pi) - v'(0)v(0) - \int_0^\pi (v'(x))^2\ dx = -\int_0^\pi (v'(x))^2\ dx.$$

Par suite, $-\int_0^\pi (v'(x))^2\ dx = \int_0^\pi v''(x)v(x)\ dx = -\lambda \int_0^\pi (v(x))^2\ dx$ puis $\lambda \int_0^\pi (v(x))^2\ dx = \int_0^\pi (v'(x))^2\ dx$. Supposons de plus que v n'est pas la fonction nulle. Alors $\int_0^\pi (v(x))^2\ dx > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle) puis

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi (v'(x))^2\ dx}{\int_0^\pi (v(x))^2\ dx} \geqslant 0.$$

Question 2 • Si $\lambda = 0$, les solutions de (5) sont les fonctions affines. Une fonction affine s'annulant en deux points distincts et la fonction nulle et donc le problème (5)-(6) n'a pas d'autre solution que $v = 0$.

• Si $\lambda < 0$, le problème (5)-(6) n'a pas d'autre solution que la fonction nulle d'après la question précédente. Les solutions de (5) sont les fonctions de la forme $x \mapsto ae^{x\sqrt{-\lambda}} + be^{x\sqrt{-\lambda}}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Question 3 Soit $\lambda > 0$. Les solutions de (5) sont les fonctions de la forme $v\ :\ x \mapsto a\cos(x\sqrt{\lambda}) + b\sin(x\sqrt{\lambda})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(6) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ a\cos(\pi\sqrt{\lambda}) + b\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right. \quad \text{(S)}.$$

Le problème (5)-(6) admet une solution non nulle si et seulement si (S) admet un couple solution non nul ce qui équivaut à $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$. De plus,

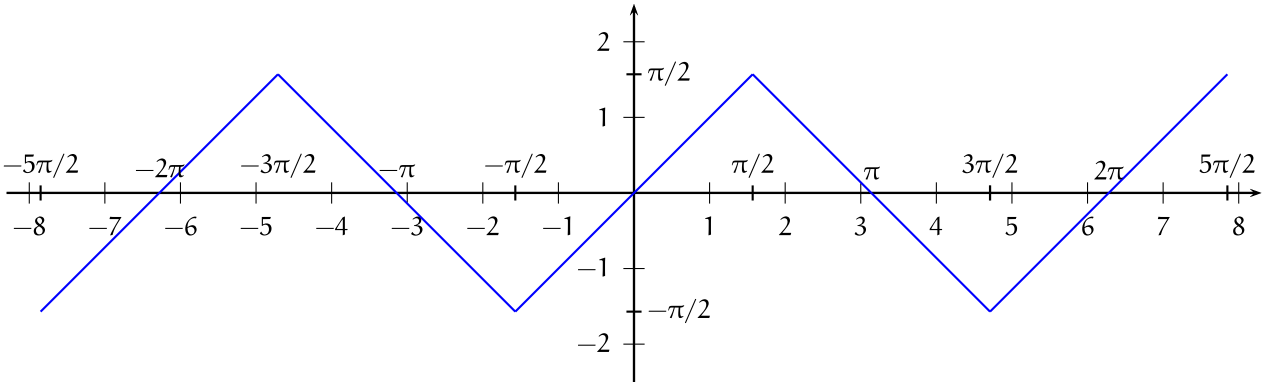
$$\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}/\ \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}/\ \lambda = n^2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*/\ \lambda = n^2\ (\text{car } \lambda \neq 0).$$

On a montré que le problème (5)-(6) admet une solution non nulle si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*/\ \lambda = n^2$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\lambda = n^2$. D'après ce qui précède les solutions du problème (5)-(6) sont les fonctions de la forme $x \mapsto b\sin(nx)$, $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions du problème (5)-(6) est donc $\mathrm{Vect}(s_n)$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $s_n(x) = \sin_n(x)$. L'ensemble des solutions du problème (5)-(6) est un espace vectoriel de dimension 1.

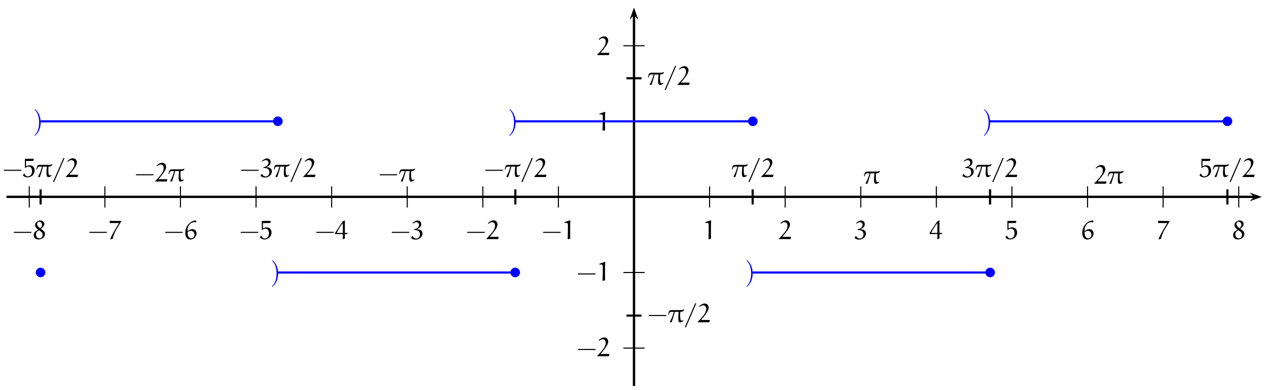
2 La série de Fourier de la condition initiale

Question 4 Graphe de φ.



La fonction φ est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, et strictement décroissante sur tout intervalle de la forme $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Question 5 Graphe de Φ'.



Question 6 Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = \begin{cases} -\pi - x \text{ si } x \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ x \text{ si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x \text{ si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
inc_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) ine^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-\pi - x)ine^{-inx}\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} xine^{-inx}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)ine^{-inx}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[(-\pi - x)(-e^{-inx})\right]_{-\pi}^{-\pi/2} - \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-1)(-e^{-inx})\,dx + \left[x(-e^{-inx})\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-e^{-inx})\,dx\right.\\
&\left.+ \left[(\pi - x)(-e^{-inx})\right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} (-1)(-e^{-inx})\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \Phi'(x)e^{-inx}\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi'(x)e^{-inx}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \Phi'(x)e^{-inx}\,dx\right.\\
&\left.+ \frac{\pi}{2}e^{-in\pi/2} - \frac{\pi}{2}e^{-in\pi/2} + \frac{\pi}{2}e^{in\pi/2} - \frac{\pi}{2}e^{in\pi/2}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x)e^{-inx}\,dx = c_n(\Phi').
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(\Phi') = inc_n(\varphi).}$$

Question 7 Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned}
c_n(\Phi') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{-inx}\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inx}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2in\pi}(-e^{in\pi/2} + e^{in\pi} + e^{-in\pi/2} - e^{in\pi/2} - e^{-in\pi} + e^{-in\pi/2}) \\
&= -\frac{1}{2in\pi}(2e^{-in\pi/2} - 2e^{in\pi/2}) = \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}
\end{aligned}$$

D'autre part, $c_0(\Phi') = \dfrac{1}{2\pi}\left(-\displaystyle\int_{-\pi}^{-\pi/2} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} dx\right) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
b_n(\varphi) = i(c_n(\varphi) - c_{-n}(\varphi)) = \frac{1}{n}(c_n(\Phi') + c_{-n}(\Phi')) &= \frac{1}{n}\left(\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} + \frac{2\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{-n\pi}\right) \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(\varphi) = \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).}$$

Question 8 Puisque φ est impaire, les a_n sont nuls. La série de FOURIER est donc la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\sin(nx)$, $n \geqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)| \leqslant \dfrac{4}{\pi n^2}$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{4}{\pi n^2}$, $n \geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a montré que la série de FOURIER de φ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (vers φ d'après le théorème de DIRICHLET, puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique).

3 Construction d'une solution de (1)-(2)-(3)

Question 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $(x,t) \mapsto b_n(\varphi)\sin(nx)$ est continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$, indéfiniment dérivable par rapport à x ou à t sur $]0,\pi[\times]0,\infty[$. Il en est de même de la fonction $(x,t) \mapsto e^{-n^2t}$ et finalement de la fonction u_n.

Pour tout $(x,t) \in]0,\pi[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = -n^2 b_n(\varphi)\sin(nx)e^{-n^2t} = \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t),$$

et donc la fonction u_n vérifie (1).

Question 10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$, $|u_n(x,t)| \leqslant \dfrac{4}{\pi n^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général u_n, $n \geqslant 1$, converge normalement, et en particulier uniformément puis simplement sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$ vers une certaine fonction u.

Puisque chaque fonction u_n, $n \geqslant 1$, est continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$ et que la série de fonctions de terme général u_n, $n \geqslant 1$, converge uniformément vers u sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$, la fonction u est continue sur $[0,\pi] \times [0,+\infty[$.

Question 11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\sin(nx)e^{-n^2t}$ et en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\partial u_n}{\partial t}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \frac{4}{\pi}\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{\partial u_n}{\partial t}\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right) = \dfrac{4}{\pi}\sin^2\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n-1} = \dfrac{4}{\pi}$ et en particulier, v_{2n-1} ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (v_n) ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en particulier que la série de terme général v_n, $n \geqslant 1$.

Question 12 Soit $\delta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, t) \in [0, \pi] \times [\delta, +\infty[$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = -\dfrac{4}{\pi}\sin(nx)e^{-n^2 t}$ puis

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}e^{-n^2\delta}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \times \frac{4}{\pi}e^{-n^2\delta} = 0$ ou encore $\dfrac{4}{\pi}e^{-n^2\delta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On ne déduit que la série numérique de terme général $\dfrac{4}{\pi}e^{-n^2\delta}$, $n \geqslant 1$, converge puis que la série de fonctions de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$, $n \geqslant 1$, converge normalement sur $[0, \pi] \times [\delta, +\infty[$.

Soit $x \in [0, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\delta, +\infty[$, posons $v_n(t) = u_n(x, t)$.

- La série de fonctions de terme général v_n, $n \geqslant 1$, converge simplement sur $[\delta, +\infty[$ vers la fonction $v : t \mapsto u(x, t)$.
- Chaque fonction v_n est dérivable sur $[\delta, +\infty[$ et pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, $v_n'(t) = \dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x, t)$.
- D'après le début de la question, la série de fonctions de terme général v_n', $n \geqslant 1$, converge normalement sur $[\delta, +\infty[$ (car plus généralement la série de fonctions de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$, $n \geqslant 1$, converge normalement sur $[0, \pi] \times [\delta, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction v est dérivable sur $[\delta, +\infty[$ et pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, $v'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(t)$.

Mais alors, en chaque (x, t) de $[0, \pi] \times [\delta, +\infty[$, la fonction u admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par rapport à sa deuxième variable et

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [\delta, +\infty[,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t).$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on a montré que u admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par rapport à sa deuxième variable sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$ et

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times]0, +\infty[,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t).$$

Question 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{Sup}\left\{\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|,\ (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[\right\} = \mathrm{Sup}\left\{\left|-\frac{4}{\pi}\sin(nx)e^{-n^2 t}\right|,\ (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[\right\} = \frac{4}{\pi} \times 1 \times 1 = \frac{4}{\pi}.$$

$\dfrac{4}{\pi}$ n'est pas le terme général d'une série numérique convergente et donc la série de fonctions de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$, $n \geqslant 1$, ne converge pas normalement sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$.

Question 14 • Pour tout $(x, t) \in [0, \pi] \times]0, +\infty[$, la question 9 permet d'affirmer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).$$

• Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

• Pour tout $x \in [0, \pi]$, $u(x, 0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\varphi)\sin(nx) = \varphi(x) = f(x)$ d'après la question 8.

En résumé, la fonction u vérifie (1)-(2)-(3).

4 Unicité de la solution

Question 15 Pour tout réel x de $[a, \alpha[$, $\dfrac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} \geqslant 0$. Quand x tend vers α par valeurs inférieures, on obtient $h'(\alpha) \geqslant 0$.

Pour tout réel x de $]\alpha, b]$, $\dfrac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} \geqslant 0$. Quand x tend vers α par valeurs supérieures, on obtient $h'(\alpha) \leqslant 0$.

Finalement, $h'(\alpha) = 0$.

Si $h''(\alpha) > 0$, h'' étant continue en α, il existe $r > 0$ tel que $[\alpha - r, \alpha + r] \subset [a, b]$ et $\forall x \in [\alpha - r, \alpha + r]$, $h''(x) > 0$. La fonction h' est alors strictement croissante sur $[\alpha - r, \alpha + r]$. Puisque $h'(\alpha) = 0$, la fonction h' est strictement négative sur $[\alpha - r, \alpha[$ puis la fonction h est strictement décroissante sur $[\alpha - r, \alpha]$. En particulier, $h''(\alpha - r) > h(\alpha)$ ce qui contredit le fait que h atteigne son maximum en α. Donc, $h''(\alpha) \leqslant 0$.

Question 16 On suppose que h est dérivable à gauche en b.
Pour tout réel x de $[a, b[$, $\dfrac{h(x) - h(b)}{x - b} \geqslant 0$. Quand x tend vers b par valeurs inférieures, on obtient $h'_g(b) \geqslant 0$.

Question 17 Soit $\varepsilon > 0$. La fonction v_ε est continue sur le compact $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc admet un maximum sur $\mathcal{D}$.

• Supposons que v_ε atteigne son maximum en un certain (x_0, y_0) de $\mathcal{D}_i$. Puisque v_ε est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{D}_i$, on sait que (x_0, y_0) est un point critique de v_ε ou encore $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x_0, y_0) = 0$. Ceci fournit $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x_0, y_0) = 0$.
Puisque u est solution de (1)-(2)-(3), on a encore $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0) = 0$ et donc

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0. \quad (1)$$

Maintenant, la fonction $h : x \mapsto v_\varepsilon(x, t_0)$ admet son maximum en $x_0 \in]0, \pi[$ et donc, d'après la question 15, $h''(x_0) \leqslant 0$ ou encore $\dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$. Ceci contredit (1) et donc, v_ε n'atteint pas son maximum en un point de $\mathcal{D}_i$.

• Supposons que v_ε atteigne son maximum en un certain (x_0, y_0) de $\mathcal{C} =]0, \pi[\times T$. Alors, la fonction $x \mapsto v_\varepsilon(x, t_0)$ atteint son maximum en $x_0 \in]0, \pi[$ et donc $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0$ ou encore $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) + 2\varepsilon \leqslant 0$ puis $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant -2\varepsilon < 0. \quad (1)$
D'autre part, la fonction $h : t \mapsto v_\varepsilon(x_0, t)$ atteint sur $[0, T]$ son maximum en T. D'après la question 16, $h'_g(T) \leqslant 0$ ou encore $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \leqslant 0$ puis $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \leqslant 0$ et finalement $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \geqslant 0. \quad (2)$

(1) et (2) constituent une contradiction et donc v_ε n'atteint pas son maximum en un point de $\mathcal{C}$.

On a montré que v_ε n'atteint pas son maximum en un point de $\mathcal{D}_i \cup \mathcal{C}$ et donc v_ε atteint son maximum en un point de $\mathcal{F}$.

Question 18 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit (x_n, t_n) un point de $\mathcal{F}$ en le quel $v_{1/n}$ atteint son maximum. La suite $(x_n, t_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite du compact $\mathcal{F}$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ convergeant vers un certain (a, b) de $\mathcal{F}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque $(x, t) \in \mathcal{D}$, on a

$$u(x, t) + \frac{1}{\varphi(n)} x^2 = v_{1/\varphi(n)}(x, t) \leqslant v_{1/\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)}) = u(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)} x^2_{\varphi(n)}.$$

u est continue sur $\mathscr{D}$ et en particulier en (a, b) et quand n tend vers $+\infty$, on obtient pour chaque $(x, t) \in \mathcal{D}$

$$u(x, t) \leqslant u(a, b).$$

Donc u atteint son maximum en un certain point (a, b) de $\mathcal{F}$.

Question 19 Soient u et v deux solutions de (1)-(2)-(3). Alors, $u - v$ vérifie (1) et (2) puis vérifie $\forall x \in [0, \pi]$, $(u - v)(x, 0) = 0$. Dans les questions (17) et (18), seule a servi la condition (1) et donc la fonction $u - v$ atteint son maximum sur $\mathcal{F}$. Mais la fonction $u - v$ est nulle sur $\mathcal{F}$ et donc $\forall T \in [0, +\infty[$, $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T]$, $(u - v)(x, t) \leqslant 0$ puis

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[, \ (u - v)(x, t) \leqslant 0,$$

et donc la fonction $u - v$ est négative ou nulle sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$. Maintenant, on peut appliquer aussi ce résultat à la fonction $v - u$ et donc la fonction $v - u$ est négative ou nulle.

Finalement, la fonction $u - v$ est nulle et donc $u = v$. Ceci montre l'unicité de la fonction u

Question 20 Soit u une solution de (1)-(2)-(3). Soit $T > 0$. On pose $\|u\|_\infty = \text{Max}\{|u(x,t), \ (x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]\}$.

• Pour tout $x \in [0,\pi]$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc est intégrable sur ce segment.
• La fonction $t \mapsto u(x,t)$ admet sur $[0,\pi] \times [0,T]$ une dérivée partielle par rapport à t telle que

- $\forall t \in [0,T]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- $\forall x \in [0,\pi]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $[0,T]$,
- $\forall (x_0,t_0) \in [0,\pi] \times [0,T]$, $|u(x,t)| \leqslant \|u\|_\infty = \varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction E est dérivable sur $[0,T]$ pour tout réel strictement positif T et donc est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme.

Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)u(x,t)\ dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)u(x,t)\ dx \\
&= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)u(x,t)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2\ dx \\
&= -\int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2\ dx \text{ (car } u \text{ vérifie (2)} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Soient maintenant u et v deux solutions de (1)-(2)-(3). Dans le calcul précédent, seules les conditions (1) et (2) ont servi. On peut donc l'appliquer à la fonction $u - v$: la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (u(x,t) - v(x,t))^2\ dt$ a une dérivée négative ou nulle sur $[0,+\infty[$ et est donc décroissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x,t) - v(x,t))^2\ dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x,0) - v(x,0))^2\ dt = 0,$$

puis que $\forall t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (u(x,t) - v(x,t))^2\ dt = 0$ et donc que $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[$, $u(x,t) - v(x,t) = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle). Par suite, $v = u$ et on a redémontré l'unicité de la solution de (1)-(2)-(3).

