SESSION 2012

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE PC

---

1 La lemniscate de Bernoulli

Question 1 On note $\mathscr{L}$ la lemniscate de Bernoulli.
Soit $M(x, y)$ un point du plan tel que $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$. On note $[\rho, \theta]$ un couple de coordonnées polaires de M tel que $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{L} &\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (\rho^2)^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \Leftrightarrow \rho^2 = 0 \text{ ou } \rho^2 = \cos(2\theta) \\ &\Leftrightarrow \rho^2 = \cos(2\theta) \text{ (car } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ fournit } \rho = 0) \\ &\Leftrightarrow \rho = \sqrt{\cos(2\theta)} \text{ (car } \rho \geqslant 0). \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, on pose $g(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$. g est définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$ et une équation polaire de la partie de $\mathscr{L}$ située dans le quart de plan $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ est $r = g(\theta)$.

Soit $M = (x, y)$ un point du plan.
- $M \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathscr{L} \Leftrightarrow s_{(Oy)}(M) \in \mathscr{L}$.
- $M \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (x, -y) \in \mathscr{L} \Leftrightarrow s_{(Ox)}(M) \in \mathscr{L}$.
- $M \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (-x, -y) \in \mathscr{L} \Leftrightarrow s_O(M) \in \mathscr{L}$.

La courbe $\mathscr{L}$ admet (Ox) et (Oy) pour axes de symétrie et donc O pour centre de symétrie. On construit la partie de $\mathscr{L}$ située dans le quart de plan $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox).

Question 2 La fonction $\theta \mapsto 2\theta$ est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. La fonction $t \mapsto t$ est une bijection sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ sur $[0, 1]$ et la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est cune bijection de $[0, 1]$ sur lui-même. Par composition, la fonction g est c constitue une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$ sur $[0, 1]$.

Question 3 Pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$, on note $M(\theta)$ le point de coordonnées polaires $[g(\theta), \theta]$.
Pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$, le point $M(\theta)$ est le point O si et seulement si $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$. On sait que la tangente en $M\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O d'angle polaire $-\dfrac{\pi}{4}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -x$. Par symétrie, les tangentes à la lemniscate en $(0, 0)$ sont les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

Question 4 Une équation polaire de la partie de $\mathscr{L}$ située dans le demi-plan $x \geqslant 0$ est $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$, $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$\begin{aligned} \rho = \sqrt{\cos(2\theta)} &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \rho^2 \Leftrightarrow 2\theta = \operatorname{Arccos}(\rho^2) \text{ (car } 2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]) \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\rho^2). \end{aligned}$$

Ainsi, la partie de $\mathscr{L}$ située dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, est le support de l'arc paramétré $\rho \mapsto m(\rho) = \rho \overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\rho^2)}$, $\rho \in [0, 1]$, où $\overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\rho^2)} = \cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\rho^2)\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\rho^2)\right)\overrightarrow{j}$.

Pour $\rho \in [0, 1[$, le vecteur dérivé est

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

$$\frac{\overrightarrow{dm}}{d\rho} = \overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)} + \rho \times \frac{1}{2} \times \frac{-2\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}\overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)+\frac{\pi}{2}} = \overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)} - \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\overrightarrow{u}_{\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)+\frac{\pi}{2}}.$$

La norme de ce vecteur est

$$s'(\theta) = \left\|\frac{\overrightarrow{dm}}{d\rho}\right\| = \sqrt{1+\frac{\rho^4}{1-\rho^4}} = \frac{1}{1-\rho^4}.$$

De même, la partie de $\mathscr{L}$ située dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, est le support de l'arc paramétré $\rho \mapsto m(\rho) = \rho\overrightarrow{u}_{-\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)}$, $\rho \in [0, 1]$.

Pour $\rho \in [0, 1[$, le vecteur dérivé est

$$\frac{\overrightarrow{dm}}{d\rho} = \overrightarrow{u}_{-\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)} + \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\overrightarrow{u}_{-\frac{1}{2}\text{Arccos}(\rho^2)+\frac{\pi}{2}}.$$

et sa norme est encore $\dfrac{1}{1-\rho^4}$.

On a montré que pour tout $\rho \in [0, 1[$, $s'(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}$.

2 Le sinus lemniscatique

Question 5 La fonction $r \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est positive et continue sur $[0, 1[$. De plus, quand r tend vers 1

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r)(1+r)(1+r^2)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-r}} = \frac{1}{2}(1-r)^{-1/2}.$$

Comme $-\dfrac{1}{2} > -1$, on en déduit que la fonction $r \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ et donc que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr$ converge.

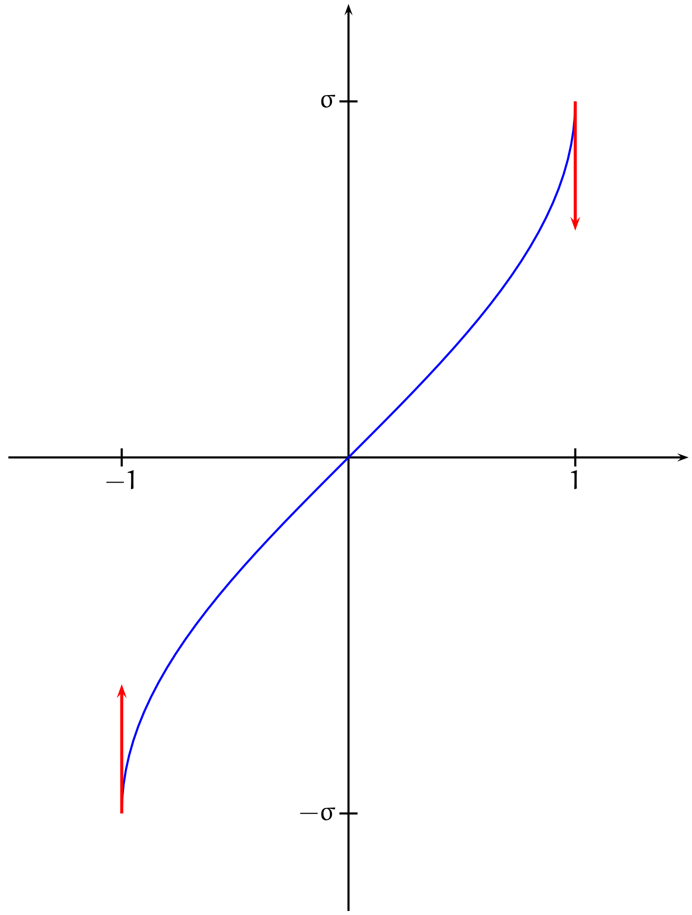
Question 6 Pour tout $\rho \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_0^\rho \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr = \int_0^\rho s'(r)\,dr = s(r) - s(0)$ est la longueur de la partie de la lemniscate située dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, entre l'origine et le point de paramètre ρ. Quand ρ tend vers 1, on obtient : σ est la longueur du quart de lemniscate située dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Question 7 La fonction $f\ :\ r \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est continue sur $]-1, 1[$. Donc la fonction F est définie et de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et $F' = f$. De plus, la fonction f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et il en est de même de la fonction F. D'autre part, d'après la question 5, $F(1)$ existe et de plus $F(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$. Donc F est définie et continue en 1. Par parité, F est aussi définie et continue en -1 et finalement F est continue sur $[-1, 1]$.

Question 8 F est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$. Quand x tend vers 1, $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ tend vers $+\infty$ et donc F n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe représentative admet en 1 une demi-tangente parallèle à (Oy).

Allure du graphe. (voir page suivante)

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.



Question 9 Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$. Pour $x \in]-1,1[$, $x^4 \in]-1,1[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^{4n}$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. On sait qu'il en est de même de F qui est la primitive de f s'annulant en 0 et que le développement s'obtient par intégration terme à terme.

Question 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \times \ldots \times \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!} = (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2}}{n!}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{2^n n! (2 \times 4 \times \ldots \times (2n))} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}},$$

puis pour tout x de $]-1,1[$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{4n+1} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(4n+1)}$ et $a_{4n} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0$.

Question 11 Il s'agit d'étudier la nature de la série de terme général a_{4n+1}. Quand n tend vers $+\infty$, d'après la formule de Stirling,

$$a_{4n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times (2\pi n) \times (4n)} = \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}} > 0.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ converge et il en est de même de la série de terme général a_{4n+1} puis de la série de terme général a_n.

Puisque F est continue en 1, $\sigma = F(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(x) = a_n x^n$ puis $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. Puisque la série de terme général a_n converge, G est bien définie en 1. Vérifions que G est continue sur $[0,1]$.

- Chaque fonction g_n est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant a_n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente.

Donc la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $[0,1]$ vers la fonction G.

D'après la théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction G est continue sur $[0,1]$ et en particulier en 1. On en déduit que $\sigma = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} G(x) = G(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

$$\boxed{\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}.}$$

Question 12 La fonction F est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$ et donc bijective de $[-1,1]$ sur $[F(-1),F(1)] = [-\sigma,\sigma]$. On sait que sa réciproque F^{-1} est continue sur $[-\sigma,\sigma]$. Montrons F^{-1} est impaire.

Soit $x \in [-\sigma,\sigma]$ puis $y = F^{-1}(x)$ de sorte que $y \in [-1,1]$ et $F(y) = x$. $-x \in [-\sigma,\sigma]$ et puisque F est impaire

$$\begin{aligned} F^{-1}(-x) &= F^{-1}(-F(y)) = F^{-1}(F(-y)) = -y \text{ (car } -y \in [-1,1]) \\ &= -F^{-1}(x). \end{aligned}$$

On a montré que F^{-1} est impaire.

Question 13 F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. F' ne s'annule pas et on sait alors que F^{-1} est de classe C^1 sur $F(]-1,1[) =]-\sigma,\sigma[$ et que pour $x \in]-\sigma,\sigma[$,

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \sqrt{1-(F^{-1}(x))^4}.$$

Quand x tend vers $\pm\sigma$, $\sqrt{1-(F^{-1}(x))^4}$ tend vers $\sqrt{1-(\pm\sigma)^4} = \sqrt{1-1} = 0$. Ainsi,

- F^{-1} est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^1 sur $]-1,1[$,
- $(F^{-1})'$ a une limite réelle quand x tend vers σ ou $-\sigma$.

D'après un théorème classique d'analyse, F^{-1} est de classe C^1 sur $[-\sigma,\sigma]$.

Question 14 On sait déjà que sl est de classe C^1 sur $[-\sigma,\sigma]$ et que $sl' = \sqrt{1-sl^4}$. Ensuite, pour tout $x \in [\sigma,3\sigma]$, $sl(x) = sl(2\sigma - x)$. Donc sl est de classe C^1 sur $[\sigma,3\sigma]$ et pour $x \in [\sigma,3\sigma]$,

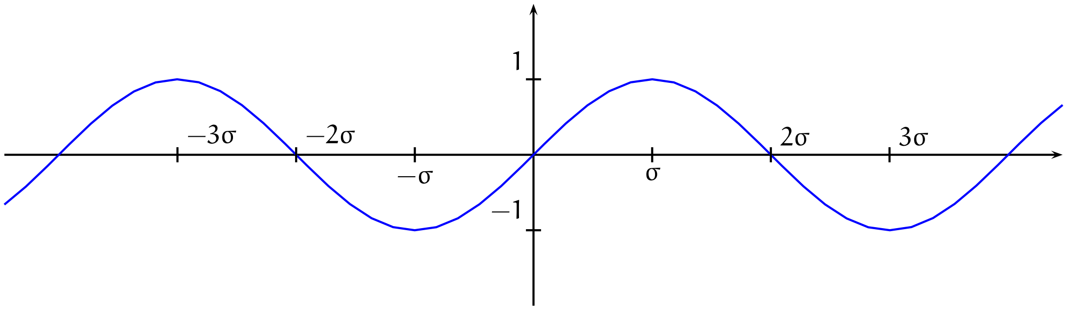
$$sl'(x) = -sl'(2\sigma - x) = -\sqrt{1-sl^4(2\sigma-x)} = -\sqrt{1-sl^4(x)}.$$

La fonction sl est continue en σ car continue à droite et à gauche et $sl(\sigma) = 1$. Ensuite, $sl'_g(\sigma) = 0 = sl'_d(\sigma)$ et donc sl est dérivable en σ et $sl'(\sigma) = 0$ puis sl' est continue sur $[-\sigma,3\sigma]$. Finalement, sl est de classe C^1 sur $[-\sigma,3\sigma]$.
Puisque $sl(-\sigma) = sl(3\sigma)$, le prolongement par 4σ-périodicité est continu sur $\mathbb{R}$. Ensuite, puisque $sl'_d(-\sigma) = 0 = sl'_g(3\sigma) = sl'_g(-\sigma)$, le prolongement par 4σ-périodicité est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Enfin,

- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\sigma + 4k\sigma \leqslant x < -\sigma + (4k+2)\sigma$, alors $sl'(x) = \sqrt{1-\sigma^4(x)}$
- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\sigma + (4k+2)\sigma \leqslant x < -\sigma + (4k+4)\sigma$, alors $sl'(x) = -\sqrt{1-\sigma^4(x)}$.

Question 15 Allure du graphe.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.



3 Equation différentielle

Question 16 Sur $]-\sigma,\sigma[$, sl est de classe C^1 et $sl' = \sqrt{1-sl^4}$ avec $1-sl^4>0$. Donc sl' est de classe C^1 sur $]-\sigma,\sigma[$ ou encore sl est de classe C^2 sur $]-\sigma,\sigma[$ et

$$sl'' = \frac{-4sl'sl^3}{2\sqrt{1-sl^4}} = -2sl^3,$$

et donc $sl''+2sl^3=0$. De même, sur $]\sigma,3\sigma[$, sl est de classe C^1 et $sl' = -\sqrt{1-sl^4}$ et donc sl est de classe C^2 sur $]\sigma,3\sigma[$ et

$$sl'' = \frac{4sl'sl^3}{2\sqrt{1-sl^4}} = -2sl^3.$$

Ainsi, sl est de classe C^1 sur $[-\sigma,3\sigma]$, de classe C^2 sur $[-\sigma,3\sigma]\setminus\{\sigma\}$ et $sl'+2sl^3=0$. Mais alors, sl'' a une limite réelle quand x tend vers σ à savoir $-2sl^3(\sigma)=-2$. D'après un théorème classique d'analyse, sl est de classe C^2 sur $[-\sigma,3\sigma]$ et $sl''+2sl^3=0$ sur $[-\sigma,3\sigma]$. Le résultat se prolonge à $\mathbb{R}$ par 4σ-périodicité puisque $-2sl^3$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Question 17 H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $H' = 2f''f'+4f'f^3 = 2f'(f''+2f^3)=0$ et donc H est constante sur $\mathbb{R}$.

Question 18 Soit $]\alpha,\beta[$ un intervalle sur lequel f' ne s'annule pas. Pour $x\in]\alpha,\beta[$,

$$f^4(x) = H - f'^2(x) < H,$$

puis $|H^{-1/4}|f(x)|<1$. Ainsi, la fonction $H^{-1/4}f$ est de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$ à valeurs dans $]-1,1[$ et F est de classe C^1 sur $]-1,1[$. On en déduit que φ est de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$ et

$$\varphi' = H^{-1/4}f'\frac{1}{\sqrt{1-H^{-1}f^4}} = H^{-1/4}f'\frac{1}{\sqrt{1-H^{-1}(H-f'^2)}} = \frac{H^{-1/4}f'}{H^{-1/2}|f'|} = \mathrm{sgn}(f')H^{1/4}.$$

De plus, f' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$ et est continue sur $]\alpha,\beta[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $]\alpha,\beta[$. Notons ε le signe de f' sur $]\alpha,\beta[$.

Pour tout réel x de $]\alpha,\beta[$, $\varphi'(x)=\varepsilon H^{1/4}$ et donc il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, $\varphi(x)=\varepsilon H^{1/4}x+b$. Ceci fournit $F(H^{-1/4}f(x)) = \varepsilon H^{1/4}x+b$ puis $H^{-1/4}f(x) = sl(\varepsilon H^{1/4}x+b)$ et donc $f(x) = H^{1/4}sl(\varepsilon H^{1/4}x+b)$.

Si $\varepsilon=1$, c'est fini. Supposons $\varepsilon=-1$. Alors, pour tout x de $]\alpha,\beta[$, $f(x)=H^{1/4}sl(-H^{1/4}x+b)$. Il est clair que le graphe de sl est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\sigma$ et donc, pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, on a aussi

$$f(x) = H^{1/4}sl(-H^{1/4}x+b) = H^{1/4}sl(2\sigma+H^{1/4}x-b) = H^{1/4}sl(H^{1/4}x+b') \text{ où } b'=2\sigma-b.$$

On a montré que si f est solution de (5) et si f' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$, il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, $f(x)=H^{1/4}sl(H^{1/4}x+b)$.

Question 19 Supposons par l'absurde que $\beta-\alpha>2\sigma H^{-1/4}$ et que f' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$. Pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, $f'(x)=H^{1/2}sl'(H^{1/4}x+b)$. $H^{1/4}x+b$ décrit l'intervalle $]H^{1/4}\alpha+b,H^{1/4}\beta+b[$ dont la longueur $H^{1/4}(\beta-\alpha)$ est strictement à 2σ. Comme sl' s'annule au moins une fois dans tout intervalle ouvert de longueur strictement supérieure, f' s'annule au moins une fois dans $]\alpha,\beta[$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Donc f' s'annule dans tout intervalle ouvert de longueur strictement supérieure à $2\sigma H^{-1/4}$.

Question 20 $f''(x_0)=-2f^3(x_0)$. Or $f^4(x_0)=H-f'^2(x_0)=H\neq0$. Donc $f(x_0)\neq0$ puis $f''(x_0)\neq0$. Puisque f'' est continue en x_0, f'' ne s'annule pas et est de signe constant sur un voisinage $]u_1,u_2[$ de x_0. Sur $]u_1,u_2[$, f' est alors strictement monotone et en particulier s'annule exactement une fois (en x_0) sur $]u_1,u_2[$.

Question 21 D'après la question 19, $\{x>x_0/\ f'(x)=0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par x_0. On en déduit que $\{x>x_0/\ f'(x)=0\}$ admet une borne inférieure et donc on en déduit l'existence de x_1. D'après la question 20, $x_1\geqslant u_2>x_0$.

Puisque $x_1=\mathrm{Inf}\{x>x_0/\ f'(x)=0\}$, il existe une suite (u_n) d'éléments de $\{x>x_0/\ f'(x)=0\}$ convergente de limite x_1. Puisque f' est continue en x_1, on a

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

$$f'(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = 0.$$

Ainsi, $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ et pour tout $x \in]x_0, x_1[$, $f'(x) \neq 0$. D'après la question 18, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de $]x_0, x_1[$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b)$ ce qui reste vrai pour $x = x_0$ et $x = x_1$ par continuité de f. Mais alors, pour tout x de $[x_0, x_1]$, $f'(x) = H^{1/2}\mathrm{sl}'(H^{1/4}x + b)$ puis la fonction $x \mapsto \mathrm{sl}'(H^{1/4}x + b)$ s'annule en x_0 et x_1 et ne s'annule pas sur $]x_0, x_1[$. On en déduit que l'intervalle $[H^{1/4}x_0 + b, H^{1/4}x_1 + b]$ est de longueur 2σ puis que $x_1 - x_0 = 2\sigma H^{-1/4}$.

Question 22 Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [x_0, x_1]$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b)$.
De même que dans la question précédente, $x_{-1} < x_0$, $f'(x_{-1}) = 0$, $x_0 - x_{-1} = 2\sigma H^{-1/4}$ et f' ne s'annule pas sur $]x_{-1}, x_0[$. Donc il existe $b' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [x_{-1}, x_0]$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b')$. En particulier, si $x = x_0$, on a $H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x_0 + b) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x_0 + b')$ puis il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b' = b + 4\sigma$. Mais alors, pour $x \in [x_{-1}, x_0]$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b + 4\sigma) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b)$. On a montré que

$$\forall x \in [x_{-1}, x_1],\ f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b) \text{ où cette fois-ci } x_1 - x_{-1} = 4\sigma H^{-1/4}.$$

On définit alors par récurrence deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \mathrm{Inf}\{x > x_n/\ f'(x) = 0\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{-(n+1)} = \mathrm{Sup}\{x < x_{-n}/\ f'(x) = 0\}$. Le travail précédent s'applique par récurrence sur chaque $[x_n, x_{n+1}]$ de sorte que $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b)$ et $\forall x \in [x_{-(n+1)}, x_{-n}]$, $f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b)$. Maintenant, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = x_0 + 2\sigma H^{-1/4}n$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}(H^{1/4}x + b).}$$

4 Le calcul trigonométrique généralisé

Question 23 $\mathrm{sl}' = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4}$ et donc $\mathrm{cl} = \pm\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{sl}^4}}{1+\mathrm{sl}^2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{sl}^2}{1+\mathrm{sl}^2}}$ puis

$$\mathrm{sl}^2 + \mathrm{cl}^2(1 + \mathrm{sl}^2) = \mathrm{sl}^2 + (1 - \mathrm{sl}^2) = 1,$$

et donc $\mathrm{sl}^2 + \mathrm{cl}^2 = 1 -^2 \mathrm{cl}^2$.

Question 24 D'après la question 16, la fonction $(\mathrm{sl}')^2 + \mathrm{sl}^4$ est constante. Cette constante est sa valeur en 0 à savoir $1 + 0 = 1$. Donc $(\mathrm{sl}')^2 = 1 - s^4$.

cl est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}' &= \mathrm{sl}''\frac{1}{1+\mathrm{sl}^2} + \mathrm{sl}'\frac{-2\mathrm{sl}\ \mathrm{sl}'}{(1+s^2)^2} = -2\mathrm{sl}^3\frac{1}{1+\mathrm{sl}^2} - 2\mathrm{sl}\frac{1-\mathrm{sl}^4}{(1+\mathrm{sl}^2)^2} = \frac{-2\mathrm{sl}^3 - 2\mathrm{sl}(1-\mathrm{sl}^2)}{1+\mathrm{sl}^2}\\ &= \frac{-2\mathrm{sl}}{1+\mathrm{sl}^2}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}'' &= -2\mathrm{sl}'\frac{1}{1+\mathrm{sl}^2} - 2\mathrm{sl}\frac{-2\mathrm{sl}\ \mathrm{sl}'}{(1+\mathrm{sl}^2)^2} = -2\frac{\mathrm{sl}'}{1+\mathrm{sl}^2}\left(1 - \frac{2\mathrm{sl}^2}{1+\mathrm{sl}^2}\right) = -2\mathrm{cl}\frac{1-\mathrm{sl}^2}{1+\mathrm{sl}^2} = -2\mathrm{cl}\frac{1-\mathrm{sl}^4}{(1+\mathrm{sl}^2)^2}\\ &= -2\mathrm{cl}\frac{(\mathrm{sl}')^2}{(1+\mathrm{sl}^2)^2} = -2\mathrm{cl}^3\end{aligned}$$

Donc cl vérifie l'équation différentielle (5).

Question 25 $\mathrm{cl}'^2(0) + \mathrm{cl}^4(0) = \left(\dfrac{-2\mathrm{sl}(0)}{1+\mathrm{sl}^2(0)}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{sl}'(0)}{1+\mathrm{sl}^2(0)}\right)^4 = 0^2 + 1^4 = 1$. Ainsi, on peut prendre $H = 1$ pour la fonction cl. D'après la question 22, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(x + b)$. Pour $x = 0$, on obtient $\mathrm{sl}(b) = 1$ et donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \sigma + 4k\sigma$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(x + \sigma + 4k\sigma) = \mathrm{sl}(x + \sigma) = \mathrm{sl}(2\sigma - (x + \sigma)) = \mathrm{sl}(\sigma - x).$$

Question 26 La fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $(1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))G(x,y) = \mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y) + \mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}'(x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}^2(y)G(x,y) + (1 + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = s'(x)\mathrm{sl}'(y) + \mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}''(x) = s'(x)\mathrm{sl}'(y) - 2\mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}^3(x)$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

et

$$2\mathrm{sl}'(y)\mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}^2(x)G(x,y)+(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=\mathrm{sl}'(y)\mathrm{sl}'(x)+\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}''(y)=\mathrm{sl}'(y)\mathrm{sl}'(x)-2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}^3(y).$$

En soustrayant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right)&=2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)(\mathrm{sl}^2(y)-\mathrm{sl}^2(x))-2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)(\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)-\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y))G(x,y)\\&=2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\frac{(\mathrm{sl}^2(y)-\mathrm{sl}^2(x))(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))-(\mathrm{sl}'^2(x)\mathrm{sl}^2(y)-\mathrm{sl}'^2(y)\mathrm{sl}^2(x))}{1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right)&=2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\big((\mathrm{sl}^2(y)-\mathrm{sl}^2(x))(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))\\&\quad-(\mathrm{sl}^2(y)(1-\mathrm{sl}^4(x))-\mathrm{sl}^2(x)(1-\mathrm{sl}^4(y)))\big)=0.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}.}$$

Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $g(x)=G(x,a-x)$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,a-x)-\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,a-x)=0$ et donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que G est constante le long de la droite d'équation $x+y=a$.

Question 27 Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Posons $a=x_0+y_0$

$$G(x_0,y_0)=G(x_0,a-x_0)=g(x_0)=g(0)=G(0,a)=\mathrm{sl}(a)=\mathrm{sl}(x_0+y_0).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ G(x,y)=\mathrm{sl}(x+y).}$$

On en déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{sl}(x+y)=\frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)+\mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}'(x)}{1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}=\frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y)(1+\mathrm{sl}^2(y))+\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(x)(1+\mathrm{sl}^2(x))}{1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$$

Question 28 En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{sl}(2x)=\frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(x)(1+\mathrm{sl}^2(x))}{1+\mathrm{sl}^4(x)}=\frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(x)}{1+\mathrm{sl}^4(x)}$$

Soit $x\in[-1,1]$. Alors $F(x)\in[-\sigma,\sigma]$ puis $\mathrm{sl}'(F(x))=\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(F(x))}$ d'après la question 14. On en déduit que

$$\mathrm{sl}\left(2\int_0^x\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}\,dr\right)=\mathrm{sl}(2F(x))=\frac{2\mathrm{sl}(F(x))\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(F(x))}}{1+\mathrm{sl}^4(F(x))}=\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}.$$

Maintenant, la restriction de sl à $[-\sigma,\sigma]$ constitue une bijection de $[-\sigma,\sigma]$ sur $[-1,1]$. Donc, si $2F(x)\in[-\sigma,\sigma]$ ou encore si $x\in\left[\mathrm{sl}\left(-\dfrac{\sigma}{2}\right),\mathrm{sl}\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)\right]\cap[-1,1]=\left[\mathrm{sl}\left(-\dfrac{\sigma}{2}\right),\mathrm{sl}\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)\right]$,

$$\mathrm{sl}(2F(x))=\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\Rightarrow 2F(x)=F\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right)\Rightarrow 2\int_0^x\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}\,dr=\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}}\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}\,dr.$$

$$\boxed{\text{Soit }\alpha=\mathrm{sl}\left(\frac{\sigma}{2}\right).\ \forall x\in[-\alpha,\alpha],\ 2\int_0^x\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}\,dr=\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}}\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}\,dr.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.