SESSION 2012

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaires

1) Soit $f \in \mathscr{L}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)e^{-2i\pi x\xi}| = |f(x)|$. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$. En particulier, $\widehat{f}(\xi)$ existe dans $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L},\ \widehat{f} \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\xi, x) & \mapsto & f(x)e^{-2i\pi x\xi} \end{array}$.

- Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(\xi, x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto \Phi(\xi, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(\xi, x)| = |f(x)| = \varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L},\ \widehat{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2) Montrons que $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$). On a déjà $\mathscr{W} \subset \mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{W}^* \subset \mathscr{L}^*$).
La fonction nulle est dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$) et $\widehat{0} = 0$ est dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$). Donc la fonction nulle est dans $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$).
Soient f et g deux éléments de $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$) et λ et μ deux nombres complexes. Alors, f et g sont dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$) et de plus $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$). La fonction $\lambda f + \mu g$ est encore dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$) puis par linéarité de l'intégrale

$$\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g}.$$

Mais alors, puisque $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$) est un espace vectoriel, $\widehat{\lambda f + \mu g}$ est dans $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^*$) et finalement $\lambda f + \mu g$ est dans $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$).

$$\boxed{\mathscr{W} \text{ (resp. } \mathscr{W}^*) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L} \text{ (resp. } \mathscr{L}^*).}$$

Soit $f \in \mathscr{W}^*$. Alors f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathscr{L}^*$ ou encore f et $\widehat{f}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et sont dominées en $+\infty$ ou $-\infty$ par une fonction du type $x \mapsto |x|^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. On en déduit que f et $\widehat{f}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ et donc que f est dans $\mathscr{W}$. On a montré que

$$\boxed{\mathscr{W}^* \subset \mathscr{W}.}$$

3) Soient $f \in \mathscr{L}$ et $\alpha > 0$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(\alpha x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et en posant $u = \alpha x$ (l'application $x \mapsto \alpha x$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même), on obtient l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(\alpha x)e^{-2i\pi x\xi}$ et de plus

$$\widehat{f_\alpha}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi u\frac{\xi}{\alpha}}\,du = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L},\ \forall \alpha > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f_\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).}$$

De même, pour $(y,\nu)\in\mathbb{R}^2$, en posant $u=x+y$, on obtient

$$\widehat{f_{y,\nu}}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)e^{-2i\pi(\nu+\xi)x}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-2i\pi(\nu+\xi)(u-y)}\,du=e^{2i\pi y(\nu+\xi)}\widehat{f}(\xi+\nu).$$

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L},\ \forall(y,\nu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R},\ \widehat{f_{y,\nu}}(\xi)=e^{2i\pi y(\nu+\xi)}\widehat{f}(\xi+\nu).}$$

On note en particulier que la transformée de FOURIER de la fonction $x\mapsto f(x+y)$ est la fonction $\xi\mapsto e^{2i\pi y\xi}\widehat{f}(\xi)$. Maintenant, si f est dans $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$), il est clair que les fonctions f_α, $\alpha>0$, et $f_{y,\nu}$, $(y,\nu)\in\mathbb{R}^2$, sont encore dans $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$).

4) La fonction s est dans $\mathscr{L}$ et donc $\widehat{s}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\xi\in\mathbb{R}$. $\widehat{s}(0)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}dx=1$ et si $\xi\neq0$,

$$\widehat{s}(\xi)=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx=\left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2}=\frac{e^{i\pi\xi}-e^{-i\pi\xi}}{2i\pi\xi}=\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

$$\boxed{\forall\xi\in\mathbb{R},\ \widehat{s}(\xi)=\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }\xi=0\\ \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\text{ si }\xi\neq0\end{array}\right..}$$

La fonction s est dans $\mathscr{L}$ et même dans $\mathscr{L}^*$. Donc $\widehat{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\xi\in\mathbb{R}$. $\widehat{t}(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx=1$ et si $\xi\neq0$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\widehat{t}(\xi)&=\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos(2\pi x\xi)\,dx-i\int_{-1}^{1}(1-|x|)\sin(2\pi x\xi)\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(2\pi x\xi)\,dx\text{ (par parité)}\\&=2\left(\left[(1-x)\frac{\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi}\right]_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{2\pi\xi}\int_{0}^{1}\sin(2\pi x\xi)\,dx\right)=\frac{1}{\pi\xi}\left[-\frac{\cos(2\pi x\xi)}{2\pi\xi}\right]_{x=0}^{x=1}\\&=\frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\xi\in\mathbb{R},\ \widehat{t}(\xi)=\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }\xi=0\\ \dfrac{1-\cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2}\text{ si }\xi\neq0\end{array}\right..}$$

On note que la fonction $\xi\mapsto\xi^2\widehat{t}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction t est dans $\mathscr{W}^*$.

5) La fonction s est dans $\mathscr{L}$. Donc la fonction $\widehat{s}$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1). Vérifions que la fonction $\widehat{s}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{s}(\xi)|\,d\xi&\geqslant\int_{1}^{+\infty}\frac{|\sin(\pi\xi)|}{\pi\xi}\,d\xi=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{|\sin(\pi\xi)|}{\pi\xi}\,d\xi\\&\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n}^{n+1}|\sin(\pi\xi)|\,d\xi=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{s}(\xi)|\,d\xi=+\infty$ ou encore la fonction $\widehat{s}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction s est un élément de $\mathscr{L}$ tel que $\widehat{s}$ n'est pas un élément de $\mathscr{L}$ ou encore s n'est pas dans $\mathscr{W}$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathscr{W}^*\subset\mathscr{W}\underset{\neq}{\subset}\mathscr{L}.}$$

6) Pour tout entier naturel n et tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\left|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f_n}(\xi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-f_n(x))e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-f_n(x)|\,dx = \|f-f_n\|_1$$

puis, pour tout entier naturel n, $\left\|\widehat{f}-\widehat{f_n}\right\|_\infty \leqslant \|f-f_n\|_1$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_1 = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\widehat{f}-\widehat{f_n}\right\|_\infty = 0$. Ceci montre que la suite de fonctions $\left(\widehat{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$. On note que le résultat persiste si on suppose simplement f et les f_n, $n\in\mathbb{N}$, dans $\mathscr{L}$.

B. Formule sommatoire de Poisson

7) Soit $f\in\mathscr{L}^*$. Il existe $\alpha>1$ et $M>0$ tel que pour tout t réel, $|t|^\alpha|f(t)|\leqslant M$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\neq -x$,

$$f(x+n)|\leqslant \frac{M}{|x+n|^\alpha}.$$

Puisque $\alpha>1$, les séries numériques de terme généraux respectifs $\dfrac{M}{|x+n|^\alpha}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq -x$, et $\dfrac{M}{|x-n|^\alpha}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq x$, sont convergentes. On en déduit que chacune des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(x+n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(x-n)$ sont absolument convergentes et donc convergentes. On en déduit encore que $\widetilde{f}(x)$ existe.

Soit $x\in\mathbb{R}$. En posant $m=n+1$, on obtient

$$\widetilde{f}(x+1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+1+n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)=\widetilde{f}(x).$$

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}^*,\ \widetilde{f}\text{ est définie sur }\mathbb{R}\text{ et 1-périodique.}}$$

Montrons que $\widetilde{f}$ est continue sur $[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{Z}$ et $x\in[0,1]$, posons $f_n(x)=f(x+n)$ puis $\|f_n\|_\infty=\sup\{|f_n(x)|,\ x\in[0,1]\}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Avec les notations de la question 7), pour tout $x\in[0,1]$,

$$|f_n(x)|=|f(x+n)|\leqslant \frac{M}{(x+n)^\alpha}\leqslant \frac{M}{n^\alpha},$$

et donc $\|f_n\|_\infty\leqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$. Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{M}{n^\alpha}$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[0,1]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$, il en est de même de la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

On montre de même que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0,1]$ et finalement $\widetilde{f}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_{-n}+f+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0,1]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}^*,\ \widetilde{f}\text{ est continue sur }\mathbb{R}.}$$

8) Soit $n\in\mathbb{Z}$. Avec les notations de la question précédente, pour tout réel x de $[0,1]$,

$$\widetilde{f}(x)e^{-2i\pi nx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x)e^{-2in\pi x}=\sum_{k=1}^{+\infty} f_{-k}(x)e^{-2in\pi x}+f(x)e^{-2in\pi x}+\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)e^{-2in\pi x}.$$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in[0,1]$, $\left|f_k(x)e^{-2in\pi x}\right|=|f_k(x)|$. La question précédente montre alors que les séries de fonctions de termes généraux respectifs $x\mapsto f_k(x)e^{-2in\pi x}$, $k\in\mathbb{N}^*$, et $x\mapsto f_{-k}(x)e^{-2in\pi x}$, $k\in\mathbb{N}^*$, convergent uniformément sur le segment $[0,1]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}
c_n\left(\widetilde{f}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(y)e^{-2i\pi n(y-k)}\,dy\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2ink\pi}\int_k^{k+1} f(y)e^{-2in\pi y}\,dy=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(y)e^{-2in\pi y}\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2in\pi y}=\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\left(\widetilde{f}\right) = \widehat{f}(n).}$$

9) Soit $f \in \mathscr{W}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\left(\widetilde{f}\right)e^{2in\pi x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2in\pi x}$.

Puisque $\widehat{f} \in \mathscr{L}^*$, il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^\alpha|f(x)| \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a en particulier

$$\left|c_n\left(\widetilde{f}\right)e^{2in\pi x}\right| = \left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{M}{|n|^\alpha}.$$

Ceci montre que les séries de fonctions de termes généraux respectifs $x \mapsto c_n\left(\widetilde{f}\right)e^{2in\pi x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \mapsto c_{-n}\left(\widetilde{f}\right)e^{-2in\pi x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent normalement sur $\mathbb{R}$ et en particulier uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. La fonction S est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, S est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et aussi S est 1-périodique.

On peut calculer les coefficients de FOURIER de S. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Encore une fois, les séries de fonctions de termes généraux respectifs $x \mapsto c_k\left(\widetilde{f}\right)e^{2i(k-n)\pi x}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $x \mapsto c_{-k}\left(\widetilde{f}\right)e^{2i(-k-n)\pi x}$, $k \in \mathbb{N}^*$, convergent uniformément sur le segment $[0, 1]$. On peut de nouveau intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}
c_n(S) &= \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left(\widetilde{f}\right)e^{2ik\pi x}\right)e^{-2in\pi x}\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left(\widetilde{f}\right)\int_0^1 e^{2i(k-n)\pi x}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left(\widetilde{f}\right)\delta_{k,n} \\
&= c_n\left(\widetilde{f}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $\widetilde{f}$ et S sont continues sur $\mathbb{R}$, 1-périodiques et ont les mêmes coefficients de FOURIER. On en déduit que ces deux fonctions sont égales d'après le rappel de l'énoncé ou encore $\widetilde{f}$ est égale à la somme de sa série de FOURIER.

Par suite, pour tout réel x,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \widetilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\left(\widetilde{f}\right)e^{2in\pi x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2in\pi x}.$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \widetilde{f}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{W}^*,\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).}$$

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

10) Soit $f \in \mathscr{W}^*$. Soit $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_{x,\xi}(n) = f(x+n)e^{-2i\pi n\xi}$ puis, d'après la question 3),

$$\widehat{f_{x,\xi}}(n) = e^{2i\pi x(\xi+n)}\widehat{f}(n+\xi).$$

La formule de POISSON appliquée à la fonction $f_{x,\xi}$ (qui est encore dans $\mathscr{W}^*$) fournit alors pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{x,\xi}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f_{x,\xi}}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\xi)e^{2i\pi x(\xi+n)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, posons $F_x(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$. Puisque f est dans $\mathscr{W}^*$, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dans $\mathscr{L}^*$. Puisque $|F_x| = \left|\widehat{f}\right|$, F_x est également dans $\mathscr{L}^*$ et d'après la partie B, on peut définir sa périodisée : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{F_x}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_x(\xi+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\xi)e^{2i\pi x(n+\xi)}.$$

D'autre part, une nouvelle fois on peut intégrer terme à terme, la série de fonctions considérée convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$,

$$\begin{aligned}c_n\left(\widetilde{F_x}\right) &= \int_0^1 \widetilde{F_x}(\xi)e^{-2in\pi\xi}\,d\xi = \int_0^1\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p)e^{-2i\pi p\xi}\right)e^{-2in\pi\xi}\,d\xi \text{ (d'après la formule de POISSON généralisée)}\\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p)\int_0^1 e^{-2i\pi(p+n)\xi}\,d\xi = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p)\delta_{p,-n}\\ &= f(x-n).\end{aligned}$$

Le développement de $\widetilde{F_x}$ en série de FOURIER est donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-n)e^{2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi}$ et $\widetilde{F_x}$ est égale à la somme de sa série de FOURIER.

11) Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question 8), pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$c_n\left(\widetilde{F_x}\right) = \widehat{F_x}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\xi)e^{-2i\pi n\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}e^{-2in\pi\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2i\pi(x-n)\xi}\,d\xi$$

En particulier, d'après la question précédente,

$$f(x) = c_0\left(\widetilde{F_x}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi.$$

12) D'après la formule d'inversion de FOURIER, pour tout $f\in\mathscr{W}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{-2i\pi x\xi}\,dx = f(-x).$$

Soit alors $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de la transformation de FOURIER dans $\mathscr{W}^*$. Donc il existe un élément non nul f_0 de $\mathscr{W}^*$ tel que $\widehat{f_0} = \lambda f_0$. La transformation de FOURIER étant linéaire, pour tout réel x,

$$f_0(-x) = \widehat{\widehat{f_0}}(x) = \lambda\widehat{f_0}(x) = \lambda^2 f_0(x),$$

puis $f_0(x) = f_0(-(-x)) = \lambda^2 f_0(-x) = \lambda^4 f_0(x)$. Finalement, $f_0 = \lambda^4 f_0$ puis $\lambda^4 = 1$ car $f_0\neq 0$. On a ainsi montré qu'une valeur propre de la transformation de FOURIER est élément de $\{1, i, -1, -i\}$.

Les seules valeurs propres réelles possibles de la transformation de FOURIER sont 1 et -1. Maintenant, la fonction t est dans $\mathscr{W}^*$ d'après la remarque de la fin de la question 4).

Puisque pour tout réel x, $\widehat{\widehat{t}}(x) = t(-x)$, $\widehat{t}$ est également dans $\mathscr{W}^*$. Puisque t et $\widehat{t}$ sont dans $\mathscr{W}^*$, il en est de même de $f_1 = t+\widehat{t}$ et $f_2 = t-\widehat{t}$ d'après la question 2).

• Pour tout réel x, puisque t est paire

$$\widehat{f_1}(x) = \widehat{t}(x) + \widehat{\widehat{t}}(x) = \widehat{t}(x) + t(-x) = \widehat{t}(x) + t(x) = f_1(x).$$

Ainsi, f_1 est un élément, clairement non nul, de $\mathscr{W}^*$ tel que $\widehat{f_1} = f_1$. Donc 1 est effectivement une valeur propre réelle de la transformation de FOURIER dans $\mathscr{W}^*$.

• De même, pour tout réel x,

$$\widehat{f_2}(x) = \widehat{t}(x) - \widehat{\widehat{t}}(x) = \widehat{t}(x) - t(-x) = \widehat{t}(x) - t(x) = -f_2(x).$$

Ainsi, f_2 est un élément non nul de $\mathscr{W}^*$ tel que $\widehat{f_2} = f_2$. Donc -1 est effectivement une valeur propre réelle de la transformation de FOURIER dans $\mathscr{W}^*$.

Les valeurs propres réelles de la transformation de FOURIER dans $\mathscr{W}^*$ sont 1 et -1.

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

13) Soit $f \in \mathscr{W}^*$ telle que $\widehat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Notons alors que $\widehat{f}$ s'annule en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ par continuité.
D'après la formule de Poisson généralisée de la question 10), utilisée avec $x = 0$, pour tout réel ξ, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\xi).$$

Supposons de plus $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Si $n \geqslant 1$, $n+\xi \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $\widehat{f}(n+\xi) = 0$.
De même, si $n \leqslant -1$, $n+\xi \leqslant -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et donc $\widehat{f}(n+\xi) = 0$. Il reste

$$\forall \xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \widehat{f}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi}.$$

(et d'autre part, $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \frac{1}{2}$). Ainsi, la donnée des $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ détermine $\widehat{f}$ de manière unique. Mais alors, f est déterminée de manière unique grâce à la formule d'inversion de Fourier :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi}\right) e^{2i\pi x\xi}\,d\xi.}$$

14) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, posons $g(\xi) = t\left(\frac{\xi - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) - t\left(\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)$. g est dans $\mathscr{W}^*$. On peut donc appliquer à g la formule d'inversion de Fourier.
Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t\left(\frac{\xi - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) - t\left(\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) e^{2i\pi x\xi}\,d\xi = -\widehat{g}(-x)$.
Pour tout réel x, on a $\widehat{f}(x) = -(-\widehat{(\widehat{g})}(-x)) = g(x)$.
Si $\xi > \frac{1}{2} + \varepsilon$, alors $\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varepsilon} \geqslant \frac{\xi - \frac{1}{2}}{\varepsilon} > 1$ et donc $\widehat{f}(\xi) = g(\xi) = 0$. On a aussi $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $\xi < -\frac{1}{2} - \varepsilon$ par parité. $\widehat{f}$ est donc nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$. D'autre part, f est un élément de l'espace vectoriel $\mathscr{W}^*$.
Déterminons maintenant les $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. D'après la question 3), pour tout réel ξ,

$$f(\xi) = -\widehat{g}(-\xi) = -\varepsilon\left(e^{-i\pi\xi} - e^{i\pi\xi}\right)\widehat{t}\,(-\varepsilon\xi) = 2i\varepsilon\sin(\pi\xi)\widehat{t}\,(\varepsilon\xi).$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(n) = 2i\varepsilon\sin(n\pi)\widehat{t}\,(\varepsilon n) = 0.$$

Ainsi, f est un élément de $\mathscr{W}^*$ qui coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{Z}$. Mais f n'est pas la fonction nulle car pour $\xi \neq 0$, $f(\xi) = 2i\varepsilon\sin(\pi\xi)\frac{1-\cos(2\varepsilon\pi\xi)}{2\pi^2\varepsilon^2\xi^2}$. f n'est donc pas uniquement déterminée par ses valeurs sur $\mathbb{Z}$.

E. Contre-exemple de Katznelson

15) Puisque la fonction t s'annule en chaque entier non nul, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $u_k(n) = 0$. D'autre part, $u_k(0) = t(0) - t(0) = 0$. Ainsi, chaque fonction u_k s'annule sur $\mathbb{Z}$. Mais alors, si x est un entier relatif, chaque $u_{k,N_k}(x)$ est nul. On en déduit que $f(x)$ existe et vaut 0.

On note maintenant que pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k s'annule en dehors de $\left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]$ car si x est un réel tel que $|x| > \frac{1}{2^k}$, alors $|2^k x| > 1$ et $|2^{k+1}x| > 2 > 1$ puis $u_k(x) = 0$.
Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ puis $K \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in [K+\varepsilon, K+1-\varepsilon]$, on a $|x - n| \geqslant \varepsilon$ pour tout entier relatif n. Soit alors k_0 un entier naturel tel que $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$ (par exemple, $k_0 = \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$). Pour tout entier naturel $k \geqslant k_0$, on a $\frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$ et donc pour tout x de $[K+\varepsilon, K+1-\varepsilon]$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $|x - n| > \frac{1}{2^k}$ et donc

$$\forall k \geqslant k_0,\ \forall x \in [K+\varepsilon, K+1-\varepsilon],\ \forall n \in \mathbb{Z},\ u_k(x-n) = 0,$$

puis

$$\forall k \geqslant k_0,\ \forall x \in [K+\varepsilon, K+1-\varepsilon],\ u_{k,N_k}(x) = 0,$$

et donc

$$\forall x \in [K+\varepsilon, K+1-\varepsilon],\ f(x) = \sum_{k=0}^{k_0} u_{k,N_k}(x).$$

Ainsi, $f_{/[K+\varepsilon,K+1-\varepsilon]} = \sum_{k=0}^{k_0} u_{k,N_k/[K+\varepsilon,K+1-\varepsilon]}$. Puisque la somme est finie et que chaque u_{k,N_k} est continue sur $\mathbb{R}$, ceci montre que f est définie et continue sur $[K+\varepsilon, K+1-\varepsilon]$. Ceci étant vrai pour chaque $K \in \mathbb{Z}$ et chaque $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a montré que

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$$

16) D'après l'énoncé, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ensuite,

- si $|x| > \frac{1}{2^k}$, $u_k(x) = 0$,
- si $\frac{1}{2^{k+1}} < |x| \leqslant \frac{1}{2^k}$, $u_k(x) = t(2^k x) = 1 - 2^k|x| \geqslant 0$,
- si $|x| \leqslant \frac{1}{2^k}$, $u_k(x) = (1 - 2^k|x|) - (1 - 2^{k+1}|x|) = 2^k|x|$.

Donc, chaque fonction u_k, $k \in \mathbb{N}$, est positive sur $\mathbb{R}$, puis chaque fonction u_{k,N_k}, $k \in \mathbb{N}$, est positive sur $\mathbb{R}$ et finalement f est positive sur $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x)\ dx &= \int_{-1/2^k}^{1/2^k} t(2^k x)\ dx - \int_{-1/2^{k+1}}^{1/2^{k+1}} t(2^{k+1}x)\ dx = \frac{1}{2^k}\int_{-1}^{1} t(u)\ du - \frac{1}{2^{k+1}}\int_{-1}^{1} t(u)\ du = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x-n)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t)\ dt = \frac{1}{2^{k+1}}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,N_k}(x)\ dx &= \frac{1}{N_k}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x-n)\ dx = \frac{1}{N_k 2^{k+1}}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) \\ &= \frac{1}{N_k 2^{k+1}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N_k}\left(1 - \frac{n}{N_k}\right)\right) = \frac{1}{N_k 2^{k+1}}\left(1 + 2N_k - \frac{1}{N_k} \times N_k(N_k+1)\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $\int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,N_k}(x)\ dx$ converge.

Ainsi,

- Chaque fonction u_{k,N_k}, $k \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La série de fonctions de terme général u_{k,N_k}, $k \in \mathbb{N}$, converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ et f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La série numérique de terme général $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_{k,N_k}(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,N_k}(x)\ dx$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,N_k}(x)\ dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

Ensuite, pour $K \in \mathbb{N}$,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{K} u_{k,N_k} \right\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} u_{k,N_k}(x) \right| \, dx = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,N_k}(x) \, dx = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^K},$$

et donc $\left\| f - \sum_{k=0}^{K} u_{k,N_k} \right\|_1$ tend vers 0 quand K tend vers $+\infty$ ou encore la série de terme général u_{k,N_k}, $k \in \mathbb{N}$, converge en moyenne vers f sur $\mathbb{R}$. Maintenant, f est dans $\mathscr{L}$ de même que chaque $\sum_{k=0}^{K} u_{k,N_k}$, $K \in \mathbb{N}$. Les calculs effectués à la question 6) sont encore valables et montrent que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

17) D'après la question 3), pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et chaque $n \in \mathbb{Z}$, la transformée de FOURIER de la fonction $x \mapsto u_k(x-n)$ est la fonction $\xi \mapsto e^{-2in\pi\xi}\widehat{u_k}(\xi)$. Par suite, pour tout réel non entier ξ, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\widehat{u_{k,N}}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ |n| < N}} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{-2in\pi\xi} \widehat{u_k}(\xi) = \frac{1}{N} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ |n| < N}} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{2in\pi\xi} \right) \widehat{u_k}(\xi) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \pi N \xi}{\sin \pi \xi} \right)^2 \widehat{u_k}(\xi).$$

et donc pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\xi \in]n, n+1[$,

$$\left| \widehat{u_{k,N}}(\xi) \right| = \frac{1}{N} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ |n| < N}} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{2in\pi\xi} \right) |\widehat{u_k}(\xi)| \leqslant \frac{1}{N} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ |n| < N}} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{2in\pi\xi} \right) \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}|,$$

ce qui reste vrai pour $x = n$ ou $x = n+1$ par continuité. Mais alors,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{u_{k,N}}(\xi) \right| \, d\xi &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left| \widehat{u_{k,N}}(\xi) \right| \, d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| \int_n^{n+1} \left(\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| < N}} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{2ip\pi\xi} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| \left(1 + \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^* \\ |p| < N}} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) \left[\frac{e^{2ip\pi\xi}}{2ip\pi} \right]_n^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}|.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$. Pour $\xi \in [n, n+1]$, d'après les questions 3) et 4),

$$\begin{aligned}
|\widehat{u_k}(\xi)| &= \left| \frac{1}{2^k} \widehat{t}\left(\frac{\xi}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} \widehat{t}\left(\frac{\xi}{2^{k+1}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2^k} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{\xi}{2^k}\right)}{2\pi^2 \frac{\xi^2}{2^{2k}}} - \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{\xi}{2^{k+1}}\right)}{2\pi^2 \frac{\xi^2}{2^{2k+2}}} \right| \\
&\leqslant \frac{2^k}{\pi^2 \xi^2} + \frac{2^{k+1}}{\pi^2 \xi^2} \leqslant \frac{3 \times 2^k}{\pi^2 n^2}.
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $\sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| \leqslant \frac{3 \times 2^k}{\pi^2 n^2}$. Ceci montre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| < +\infty$.

18) Pour $k \in \mathbb{N}$, on choisit $N_k = 2^k \left(E\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| \right) + 1 \right)$. $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement positifs et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u_{k,N_k}}(\xi)\right| \, d\xi \leqslant \frac{1}{N_k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Mais alors la série de terme général $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u_{k,N_k}}(\xi)\right| d\xi$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

D'autre part, f est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ de même que chaque u_{k,N_k}, $k \in \mathbb{N}$ ou encore f et les u_{k,N_k} sont dans $\mathscr{L}$. La question 1) permet d'affirmer que $\widehat{f}$ et les $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme à la question 16),

- Chaque fonction $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La série de fonctions de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge simplement vers $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La série numérique de terme général $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u_{k,N_k}}(\xi)\right| \, d\xi$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis la série de fonctions de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge en moyenne vers $\widehat{f}$.

Comme chaque fonction $\widehat{u_{k,N_k}}$, $k \in \mathbb{N}$ est dans $\mathscr{L}$ de même que $\widehat{f}$, on en déduit encore que la série de fonctions de terme général $\widehat{\widehat{u_{k,N_k}}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $\widehat{\widehat{f}}$ sur $\mathbb{R}$.

Soi $k \in \mathbb{N}$. La fonction u_{k,N_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur un voisinage de $\pm\infty$. Donc la fonction u_{k,N_k} est dans $\mathscr{L}^*$. Ensuite, $\widehat{u_{k,N_k}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout réel ξ,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{u_{k,N_k}}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{N_k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) e^{-2i\pi n\xi} \widehat{u_k}(\xi)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{N_k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) |\widehat{u_k}(\xi)| = |\widehat{u_k}(\xi)| = \left|\frac{1}{2^k}\widehat{t}\left(\frac{\xi}{2^k}\right) - \frac{1}{2^k}\widehat{\xi}\left(\frac{t}{2^k}\right)\right|.
\end{aligned}$$

La question 4) permet alors d'affirmer que la fonction $\xi \mapsto \xi^2\widehat{u_{k,N_k}}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et finalement que la fonction u_{k,N_k} est dans $\mathscr{W}^*$. La formule d'inversion de Fourier montre alors que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\widehat{u_{k,N_k}}}(\xi) = u_{n,N_k}(-\xi)$.

On en déduit que la série de fonction de terme général u_{k,N_k} converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\xi \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-\xi)$ qui est donc aussi la fonction f. La formule d'inversion de Fourier s'applique donc à la fonction f.

19) On a déjà vu que f s'annule sur $\mathbb{Z}$. Par suite, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, d'après la question 3),

$$\widehat{u_{k,N_k}}(\xi) = \frac{1}{N_k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) e^{-2i\pi n\xi} \widehat{u_k}(\xi) = \frac{1}{N_k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) e^{-2i\pi n\xi} \left(\frac{1}{2^k}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right)\right).$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{k,N_k}}(p) &= \frac{1}{N_k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N_k}} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) \widehat{u_k}(p) \\
&= \widehat{u_k}(p) \text{ (d'après le calcul de la question 16)} \\
&= \frac{1}{2^k}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(p) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\widehat{u_{k,N_k}}(p) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^k}\right)-\frac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right)\right) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2^k}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^k}\right)-\frac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right)\right)\\ &= \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{2^0}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^0}\right)-\frac{1}{2^{m+1}}\widehat{t}\left(\frac{p}{2^{m+1}}\right)\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \widehat{t}(p).\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall p\in\mathbb{Z}$, $\widehat{f}(p)=\widehat{t}(p)=\delta_{p,0}$ puis $\sum_{p\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(p)=1\neq 0=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)$. La formule de Poisson n'est donc pas vérifiée par la fonction f. On a donc un exemple de fonction vérifiant la formule d'inversion de Fourier et ne vérifiant pas la formule de Poisson.

F. Application à la resommation d'Ewald

20) Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $h(x)=g\left(\frac{x}{100}\right)$. h est dans $\mathscr{L}$ et d'après la question 3), pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widehat{h}(x)=100\widehat{g}(100x)=100g(100x)$. Mais alors, h est dans $\mathscr{W}^*$ et on peut lui applique la formule de Poisson. On obtient

$$\begin{aligned}1+2S &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{100}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{h}(n)\\ &= 100\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(100n) = 100\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-10000\pi n^2}\right),\end{aligned}$$

puis

$$S = 49,5+100\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-10000\pi n^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}|S-49,5| &= 100\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-10000\pi n^2}\\ &\leqslant 100\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-10000\pi}\right)^n = \frac{100e^{-10000\pi}}{1-e^{-10000\pi}} \leqslant 101e^{-10000\pi} = \left(\frac{1}{e^{\pi-\frac{\ln(101)}{10000}}}\right)^{10000} = (0,04\ldots)^{10000}\\ &\leqslant 0,1^{10000} = 10^{-10000}.\end{aligned}$$

$$\boxed{S = 49,5 \text{ à } 10^{-10000} \text{ près.}}$$

