**SESSION 2007**

**Concours commun Mines-Ponts**

SECONDE EPREUVE. FILIERE MP

---

# I Algèbres de Lie

❏ 1 - Soit $M \in \mathcal{V}$. $X$ est associé à une valeur propre de $M$ uniquement définie que l'on note $\lambda(M)$. On note que

$$MX = \lambda(M)X \Rightarrow {}^t\overline{X}MX = \lambda(M){}^t\overline{X}X \Rightarrow \lambda(M) = \frac{{}^t\overline{X}MX}{{}^t\overline{X}X} \ (X \neq 0 \Rightarrow {}^t\overline{X}X \in \mathbb{R}^*).$$

Il est alors clair que l'application $M \mapsto \lambda(M)$ est linéaire.

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathcal{V}^* / \ \forall M \in \mathcal{V}, \ MX = \lambda(M)X.}$$

❏ 2 - Soit $M \in \mathcal{V}$. $M$ est dans $\mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie, $[M, A]$ est dans $[\mathcal{U}]$ et donc par hypothèse dans $\mathcal{V}$.

❏ 3 - Montrons par récurrence que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \forall M \in \mathcal{V}, \ MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}(M)X_j.$$

- Si $i = 0$, pour $M \in \mathcal{V}$, $MX_0 = MX = \lambda(M)X = \displaystyle\sum_{j=0}^{0} C_0^j \lambda_{0-j}(M)X_j$.
- Soit $i \geq 0$. Supposons que $\forall M \in \mathcal{V}, \ MX_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}(M)X_j$.

  Soit $M \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
MX_{i+1} &= MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i \\
&= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}([M, A])X_j + A\sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}(M)X_j \text{ (par hypothèse de récurrence et puisque } [M, A] \in \mathcal{V}) \\
&= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i+1-j}(M)X_j + \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}(M)X_{j+1} = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i+1-j}(M)X_j + \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \lambda_{i+1-j}(M)X_j \\
&= \lambda_{i+1}(M)X_0 + \sum_{j=1}^{i} \left(C_i^j + C_i^{j-1}\right) \lambda_{i+1-j}(M)X_j + \lambda_0(M)X_{i+1} \\
&= \lambda_{i+1}(M)X_0 + \sum_{j=1}^{i} C_{i+1}^j \lambda_{i+1-j}(M)X_j + \lambda_0(M)X_{i+1} \\
&= \sum_{j=1}^{i} C_{i+1}^j \lambda_{i+1-j}(M)X_j.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \ \forall M \in \mathcal{V}, \ MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}(M)X_j.}$$

 

Soit $M \in \mathcal{V}$. Alors, $[M, A] \in \mathcal{V}$ et d'après ce qui précède

$$[M, A] = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j}([M, A])X_j = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j+1}(M)X_j \ (1).$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathcal{V},\ [M, A]X_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda_{i-j+1}(M)X_j \ (2).}$$

❏ 4 - Soit $E = \{p \in \mathbb{N} / \ (X_0, \ldots, X_p) \text{ libre}\}$.

- $X$ n'est pas nul et donc $(X_0)$ est une famille libre. Par suite, $E$ est non vide.
- Le cardinal d'une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ est majoré par la dimension $n$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et donc $E$ est majoré par $n-1$.

Ainsi, $E$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. On sait alors que $E$ admet un plus grand élément que l'on note $q$. Il existe donc un plus grand entier $q$ tel que la famille $(X_0, \ldots, X_q)$ soit libre.

❏ 5 - Les formules (1) et (2) montrent que pour chaque $i \in [\![0, q]\!]$, $\overline{M}_G(X_i)$ et $\overline{[M, A]}_G(X_i)$ sont dans $G$. On en déduit que

$$\overline{M}_G(G) = \text{Vect}(\overline{M}_G(X_0), \ldots, \overline{M}_G(X_q)) \subset \text{Vect}(X_0, \ldots, X_q) = G,$$

et de même, $\overline{[M, A]}_G(G) \subset G$. Donc, $\overline{M}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de $G$.

Ensuite, pour $i \in [\![0, q-1]\!]$, $\overline{A}_G(X_i) = X_{i+1} \in G$ et enfin, puisque par définition de $q$, la famille $(X_0, \ldots, X_q)$ est libre et que la famille $(X_0, \ldots, X_q, X_{q+1})$ est liée, $\overline{A}_G(X_q) = X_{q+1} \in \text{Vect}(X_0, \ldots, X_q) = G$. Ainsi, $\overline{A}_G(G) \subset G$ et finalement

$$\boxed{\overline{M}_G,\ \overline{A}_G \text{ et } \overline{[M, A]}_G \text{ sont des endomorphiqmes de } G.}$$

❏ 6 - $\text{Tr}(\overline{[M, A]}_G) = \text{Tr}(\overline{M}_G \circ \overline{A}_G) - \text{Tr}(\overline{A}_G \circ \overline{M}_G) = 0$.

$$\boxed{\text{Tr}(\overline{[M, A]}_G) = 0.}$$

❏ 7 - Pour $k \in \mathbb{Z}^{-*}$, posons $\lambda_k(M) = 0$. On rappelle d'autre part que si $j < i$, $C_j^i = 0$.
La formule (2) montre que pour $(i, j) \in [\![0, q]\!]^2$, le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $(X_0, \ldots, X_q)$ de $G$ est $C_j^i \lambda_{j-i+1}(M)$.

$$\boxed{\text{Mat}_{(X_i)_{0 \leq i \leq q}}(\overline{[M, A]}_G) = (C_j^i \lambda_{j-i+1}(M))_{0 \leq i, j \leq q}.}$$

❏ 8 - En particulier,

$$\text{Tr}(\overline{[M, A]}_G = \sum_{i=0}^{q} C_i^i \lambda_1(M) = (q+1)\lambda([M, A]),$$

et d'après la question 6 -,

$$\boxed{\lambda([M, A]) = 0.}$$

❏ 9 - Mais alors, $[M, A]X = \lambda([M, A])X = 0$ et donc

$$MAX = AMX = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)AX,$$

ce qui démontre que $AX$ est soit la colonne nulle, soit un vecteur propre de $M$ associé à la même valeur propre que $X$ et donc démontre le théorème 1.

 

## II Algèbres de Lie résolubles

❏ 10 - La propriété « il existe une matrice $P$ inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » équivaut à l'existence d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq i}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall M \in \mathcal{U}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\overline{M}(e_i) \in \text{Vect}(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et fournit en particulier une base commune de triangulation pour tous les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

❏ 11 - • Démontrons que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de LIE. Tout d'abord, $\mathcal{T}_p$ est l'image de l'espace $T_{n,s}(\mathbb{C})$ (espace des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{C}$) par l'application linéaire $T \mapsto PTP^{-1}$ et est donc un sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$. Ensuite, on sait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Par suite, si $M$ et $N$ sont deux éléments de $\mathcal{T}_p$, la matrice

$$P^{-1}[M,N]P = P^{-1}(MN - NM)P = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) - (P^{-1}NP)(P^{-1}MP),$$

est encore une matrice triangulaire supérieure. Par suite, $[\mathcal{T}_P] \subset \mathcal{T}_P$ et donc

$$\boxed{\mathcal{T}_P \text{ est une algèbre de LIE.}}$$

• Il est clair que $\{0\} = \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$. Montrons que chaque $\mathcal{N}_i$, $1 \leq i \leq n$, est une algèbre de Lie.

On note $(E_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Tout d'abord, $\mathcal{N}_i = P\text{Vect}(E_{j,k})_{k-j\geq i}P^{-1} = \text{Vect}(PE_{k,j}P^{-1})_{k-j\geq i}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$. Maintenant, $[\mathcal{N}_i]$ est l'espace engendré par les $P[E_{j,k}E_{j',k'}]P^{-1}$, $k-j \geq i$, $k'-j' \geq i$.
Soient $j$, $k$, $j'$, $k'$ quatre tels entiers. On sait que

$$E_{j,k}E_{j',k'} = \delta_{k,j'}E_{j,k'}.$$

Si ce produit est non nul, on a $k = j'$ et dans ce cas,

$$k' - j = k' - j' + k - j \geq 2i \geq i \ (*)$$

ce qui montre que le produit $E_{j,k}E_{j',k'}$ est dans l'espace des matrices dont les $k$ premières diagonales supérieures sont nulles. Il en est de même du crochet de LIE $[E_{j,k}, E_{j',k'}]$ et finalement tous les $P[E_{j,k}E_{j',k'}]P^{-1}$, $k-j \geq i$, $k'-j' \geq i$ sont dans $[\mathcal{N}_i]$. On a ainsi montré que $[\mathcal{N}_i] \subset \mathcal{N}_i$ et donc que

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathcal{N}_i \text{ est une algèbre de LIE.}}$$

• Montrons que $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $[\mathcal{N}_i] \subset \mathcal{N}_{i+1}$.

Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. Si $i \geq 1$, on peut affiner les inégalités (*) en

$$k' - j = k' - j' + k - j \geq 2i = i + i \geq i + 1,$$

et donc les $P[E_{j,k}E_{j',k'}]P^{-1}$, $k-j \geq i$, $k'-j' \geq i$ sont plus précisément dans $[\mathcal{N}_{i+1}]$.

Il reste à vérifier que $[\mathcal{T}_P] = [\mathcal{N}_0] \subset \mathcal{N}_1$. Mais si $T$ et $T'$ sont deux matrices triangulaires supérieures, les matrices $TT'$ et $T'T$ sont des matrices triangulaires supérieures ayant même diagonale principale et donc $[T,T']$ est une matrice triangulaire supérieure de diagonale principale nulle. Par suite, $[PTP^{-1}, PT'P^{-1}] = P[T,T']P^{-1}$ est dans $\mathcal{N}_1$ ce qui démontre le résultat.

On a montré que

$$\boxed{\mathcal{T}_P \text{ est une algèbre de LIE, résoluble de longueur } n.}$$

❏ 12 - Par définition, $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset [\mathcal{U}_1] = [\{0\}] = \{0\}$. Par suite, si $M$ et $M'$ sont deux éléments de $\mathcal{U}$, $MM' - M'M = [M,M'] \in \{0\}$ et donc $MM' = M'M$.

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{U} \text{ est une algèbre de LIE résoluble de longueur } 1,\ \forall (MM') \in \mathcal{U}^2,\ MM' = M'M.}$$

❏ 13 - Montrons par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $r$ endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle commutant deux à deux admettent un vecteur propre en commun.

 

• Soit $f_1$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. On sait que $f_1$ admet au moins un vecteur propre ce qui démontre le résultat pour $r = 1$.

• Soit $r \geq 1$. Supposons le résultat acquis pour $r$ endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. Soient $f_1, \ldots, f_{r+1}$ $r+1$ endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace $E$ de dimension finie non nulle commutant deux à deux deux.
$f_{r+1}$ admet au moins une valeur propre $\lambda$. Le sous-espace $F = \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda Id_E)$ est alors un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. Puisque les endomorphismes $f_1, \ldots, f_r$ commutent avec $f_{r+1}$, on sait que $F$ est stable par chacun des $f_i$, $1 \leq i \leq r$. Les restrictions des $f_i$, $1 \leq i \leq r$, à $F$ sont donc des endomorphismes de $F$, notés $\tilde{f}_i$, $1 \leq i \leq r$, commutant deux à deux. Par hypothèse de récurrence, $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r$ admettent un vecteur propre commun $x$. $x$ est par construction un vecteur propre commun à $f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}$.

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Maintenant, comme $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_r$ sont $r$ endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, commutant deux à deux d'après la question 12-, on a montré que

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall (M_1, \ldots, M_r) \in \mathcal{U}^r,\ \overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_r \text{ admettent un vecteur propre commun.}}$$

❑ 14 - $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. On peut appliquer le résultat précédent à une base $(M_1, \ldots, M_q)$ de $\mathcal{U}$ : les endomorphismes $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_q$ admettent un vecteur propre $x$ en commun. Maintenant tout élément $M$ de $\mathcal{U}$ est une combinaison linéaire de $M_1, \ldots, M_q$ et donc $x$ est un vecteur propre de $\overline{M}$ ce qui démontre le résultat.

❑ 15 - Soit $x \in E$. Si $x \in F$, $u(x) \in F$ et donc $p_H(u(x)) = 0 = p_H(u(p_H(x)))$ et si $x \in H$, $p_H(u(p_H(x))) = p_H(u(x))$. Ainsi, les endomorphismes $p_H u$ et $p_H u p_H$ coïncident sur les sous-espaces supplémentaires $F$ et $H$ et sont dons égaux. De même, $p_H v = p_H v p_H$.

$$\boxed{p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.}$$

❑ 16 - D'après la question précédente,

$$p_H u p_H p_H v p_H = p_H u p_H v p_H = (p_H u p_H) v p_H = p_H u v p_H = p_H v u p_H = p_H v p_H p_H u p_H.$$

$p_H u_H = p_H u i_H$ est la restriction à $H$ de $p_H u p_H$. De même, $p_H v_H$ est la restriction à $H$ de $p_H v p_H$. Donc $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.

$$\boxed{p_H u_H \text{ et } p_H v_H \text{ commutent.}}$$

❑ 17 - Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $\overline{\mathcal{U}}$ est sous-espace de $L(\mathbb{C}^n)$ qui est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$ alors il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ trigonalisent supérieurement.

• Puisque toute matrice carrée de format 1 est triangulaire supérieure, le résultat est vrai quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que toute algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$, résoluble de longueur 1 est telle que tous ses éléments soient simultanément trigonalisables. Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie de $M_{n+1}(\mathbb{C})$, résoluble de longueur 1.

D'après la question 14 -, les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ admettent un vecteur propre en commun. On note $e_1$ ce vecteur puis $F = \text{Vect}(e_1)$. Soit $H$ un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.
Considérons alors $\overline{\mathcal{U}'}$ l'ensemble des $p_H u_H$, $u \in \overline{\mathcal{U}}$. $\overline{\mathcal{U}'}$ est un sous-espace de $L(H)$ avec $\dim H = n$ et d'après la question 16 -, puisque $F$ est stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que deux éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ commutent, les éléments de $\overline{\mathcal{U}'}$ commutent deux à deux. On en déduit que $\overline{\mathcal{U}'}$ est une algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$, résoluble de longueur 1. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de $H$ qui est une base de triangulation commune à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}'}$. Mais alors, $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est une base de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui est une base de triangulation commune à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

❑ 18 - $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$, résoluble de longueur $p-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe alors une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qui est une base de triangulation commune à tous les éléments de $\mathcal{U}_1$. Mais alors, le vecteur $e_1$ est un vecteur propre de chaque $\overline{M}$, $M \in \mathcal{U}$.

❑ 19 - Notons $\mathcal{F}$ la famille génératrice de $E$ fournie par l'énoncé.

Si $A \in \mathcal{U}$, alors $\overline{A}(X)$ et plus généralement $\overline{AA_1} \ldots \overline{A_k}(X)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $A_j \in \mathcal{U}$, sont des éléments de $E$. Ainsi, l'image par tout élément de $\overline{U}$ des éléments de $\mathcal{F}$ sont des éléments de $E$ et donc $E$ est stable par tous les éléments de $\overline{U}$.

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_1$ sont deux algèbres de Lie de $M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}.$$

 

Puisque $X$ est un vecteur propre de chaque $\overline{M}$, $M \in \mathcal{U}_1$, associé à la valeur propre $\lambda(M)$, on a déjà

$$\forall M \in \mathcal{U}_1,\ MX = \lambda(M)X,$$

et plus généralement, d'après le théorème 1, pour $A \in \mathcal{U}$, on a $\forall M \in \mathcal{U}_1,\ MAX = \lambda(M)AX$. Par suite, par récurrence sur $k$, tout élément de $\mathcal{F}$ est soit nul soit un vecteur propre de chaque $\overline{M}$ de $\overline{U_1}$. Par linéarité, un élément de $E$ est soit nul, soit un vecteur propre de chaque $\overline{M} \in \overline{U_1}$.

**tout élément non nul de $E$ est un vecteur propre commun à tous les endomorphismes de $\overline{U_1}$.**

❏ 20 - Soit $(M, M') \in \mathcal{U}^2$. Notons $f$ l'endomorphisme $\overline{[M, M']_E}$ et posons $x_0 = X$. D'après la question 19 -, pour tout vecteur $x$ de $E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ou encore,

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \exists! \lambda_x \in \mathbb{C} /\ f(x) = \lambda_x x.$$

Montrons que $f$ est une homothétie. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

- Si $(x, x_0)$ est libre, on a

$$\lambda_{x+x_0} x + \lambda_{x+x_0} x_0 = f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0} x_0,$$

  et par identification $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$. Dans ce cas, on a $f(x) = \lambda_{x_0} x$.
- Si $(x, x_0)$ est liée, posons $f(x) = \mu x_0$.

$$f(x) = \mu f(x_0) = \lambda_{x_0}(\mu x_0) = \lambda_{x_0} x.$$

  Dans ce cas aussi, on a $f(x) = \lambda_{x_0} x$.

$f$ est donc l'homothétie de rapport $\lambda_{x_0}$. Enfin, comme en I 6 -, la trace de $f = \overline{[M, M']_E}$ est nulle.

**$\forall (M, M') \in \mathcal{U}^2$, $\overline{[M, M']_E}$ est une homothétie de trace nulle.**

❏ 21 - Puisque $E$ contient $X$, $E \neq \{0\}$. La seule homothétie de $E$ de trace nulle est donc l'application nulle. On a donc montré que pour $(M, M') \in \mathcal{U}^2$, $\overline{[M, M']}_E = 0$ et donc, puisque $E$ est stable par tous les éléments de $E$, $\overline{M}_E \overline{M'}_E = \overline{M'}_E \overline{M}_E$. Ainsi, $\{\overline{M}_E,\ M \in \mathcal{U}\}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $1$. D'après la question 17 -, il existe une base de $E$ dans laquelle tous les $\overline{M}_E$, $M \in \mathcal{U}$ trigonalisent supérieurement.

 