Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt$

1) Existence de l'intégrale.

La fonction $f\ :\ t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ensuite, $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Finalement, f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on peut poser $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt$.

2) Calcul de l'intégrale.

1er calcul. On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$. On obtient $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\ du$.

On pose alors $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\ dt$. Le calcul précédent montre l'existence de J et l'égalité $I = J$. On a alors :

$$\begin{aligned}
2I = I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\ dt \\
&= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\ dt = -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\ \frac{du}{2}\ \text{(en posant } u = 2t) \\
&= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\ du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\ du \\
&= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \frac{I}{2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\ln} (\sin(\pi - v))\ (-dv)\ \text{(en posant } v = \pi - u \\
&= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \frac{I}{2}\frac{I}{2} = -\frac{\pi\ln(2)}{2} + I
\end{aligned}$$

et donc $I = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$. On a montré que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt = -\frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

2ème calcul.

- Montrons que $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$.

Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $x_k = \frac{k\pi}{2n}$. On a donc $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$. La fonction $t \mapsto \ln(\sin(t))$ est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin(t))\ dt \geqslant (x_{k+1} - x_k)\ln\left(\sin\left(x_k\right)\right) = \frac{\pi}{2n}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt \geqslant \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$ puis

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \ln(\sin(t))\ dt\ (*).$$

De même, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \ln(\sin(t))\ dt \leqslant (x_k - x_{k-1})\ln\left(\sin\left(x_k\right)\right) = \frac{\pi}{2n}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}} \ln(\sin(t))\,dt \leqslant \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$ puis

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt\ (**).$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt$ est une intégrale convergente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\ln(\sin(t))\,dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt = 0$. Les inégalités $(*)$ et $(**)$ et le théorème des gendarmes montrent que la suite $\displaystyle\left(\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\right)_{n\geqslant 2}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt.$$

• Soit $n\geqslant 2$. $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ où $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Calculons P_n. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) &= \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n\times\prod_{k'=1}^{n-1}\sin\left(\frac{(2n-k')\pi}{2n}\right)\\ &= P_n\times\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n\times\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}P_n^2 &= \prod_{k=1}^{2n-1}\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n}}-e^{-\frac{ik\pi}{2n}}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}-e^{-\frac{ik\pi}{2n}}\left(1-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\ &= \frac{(-1)^{2n-1}}{(2i)^{2n-1}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}}\right)^{1+2+\ldots+(2n-1)}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \frac{(-1)^{2n-1}e^{-\frac{i\pi(2n)(2n-1)}{2\times(2n)}}}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\ &= \frac{(-1)^{2n-1}(-i)^{2n-1}}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right).\end{aligned}$$

Ensuite, $\displaystyle X^{2n}-1 = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)$ puis

$$\prod_{k=1}^{2n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right) = \frac{X^{2n}-1}{X-1} = 1+X+X^2+\ldots+X^{2n-1},$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right) = \underbrace{1+\ldots+1}_{2n} = 2n.$$

On en déduit que $\displaystyle P_n^2 = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$. Enfin, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle 0<\frac{k\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2}$ puis $\displaystyle\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)>0$. On en déduit que $P_n>0$ et donc que $\displaystyle P_n = \sqrt{P_n^2} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

$$\forall n\geqslant 2,\ \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Mais alors, $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\ln(P_n) = \frac{\pi}{2n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\right) = -\frac{(n-1)\pi\ln(2)}{2n}+\frac{\pi\ln(n)}{4n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\pi\ln(2)}{2}+o(1)$. On retrouve donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

