Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$

1) Existence de l'intégrale.

La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ dt est continue et positive sur $]0,1[$.

• Quand t tend vers 0, $\left|\dfrac{t-1}{\ln t}\right| = o(1)$. f se prolonge par continuité en 0 et par suite, f est intégrable au voisinage de 0 à droite.

• Quand t tend vers 1, $\dfrac{t-1}{\ln t} \sim 1$. Ainsi, f se prolonge par continuité en 1 et est donc intégrable au voisinage de 1 à gauche.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$ et on peut poser $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

2) Calcul. On obtient l'intégrale comme la limite quand x tend vers 1 de $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$.

Pour $x \in]0,1[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$. On commence par transformer l'intégrale.

Soit $x \in]0,1[$. Puisque les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sont intégrables sur $]0,x]$ (mais pas sur $]0,1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt = \int_0^x \frac{t}{\ln(t)}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt = \int_0^x \frac{1}{\ln\left(t^2\right)}\,2t\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt \\
&= \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln(u)}\,du - \int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt \text{ (posant } u = t^2 \text{ dans la première intégrale)} \\
&= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt
\end{aligned}$$

$$\forall x \in]0,1[,\ \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt.$$

Ensuite, $x^2 < x < 1$ puis, pour tout $t \in \left[x^2, x\right] \subset]0,1[$, $x^2 \leqslant t \leqslant x$ puis $\dfrac{x}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{t}{t\ln(t)} = \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln(t)}$ (car $\ln(t) < 0$).

En intégrant (et en tenant compte de $x^2 \leqslant x$), on obtient $\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{x}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{t}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t\ln(t)}\,dt$ puis, en multipliant par -1 les trois membres de l'encadrement,

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \leqslant x \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt.$$

De plus, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = \left[\ln(|\ln(t)|)\right]_x^{x^2} = \ln\left(\left|\ln\left(x^2\right)\right|\right) - \ln\left(|\ln(x)|\right) = \ln\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right| = \ln(2)$. On a montré que

$$\forall x \in]0,1[,\ x^2\ln(2) \leqslant \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt \leqslant x\ln(2).$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\int_0^1 t - 1\ln(t)\,dt = \ln(2).$$

