J. 18 1222

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2018**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Cette épreuve comporte :

1 page de garde recto
1 page d'instructions recto-verso pour remplir le QCM *(à lire très attentivement)*
10 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ICNA 2018

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

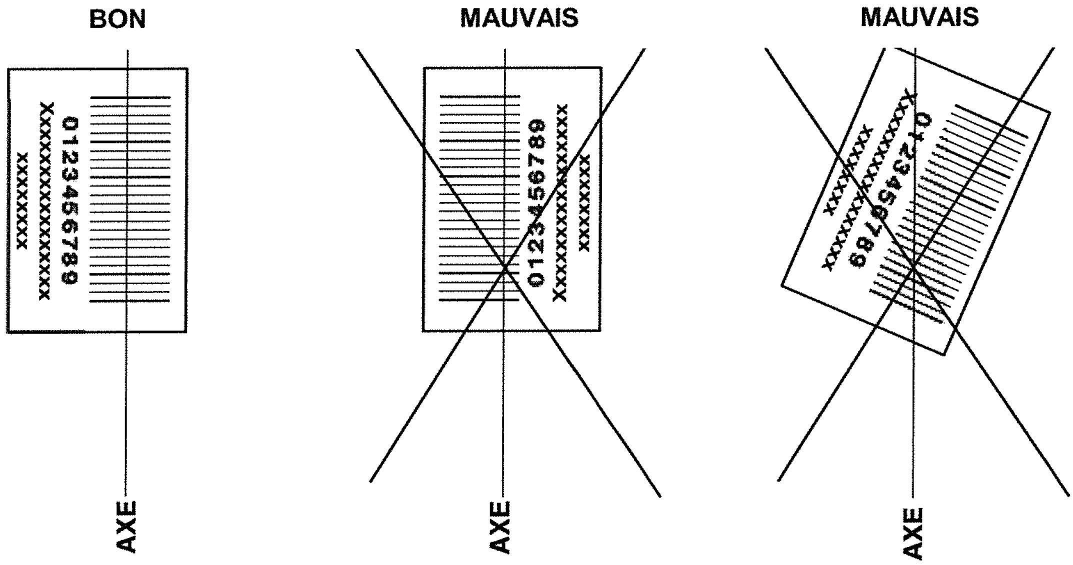
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire de mathématiques ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

<u>EXEMPLES</u> :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement****.*

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

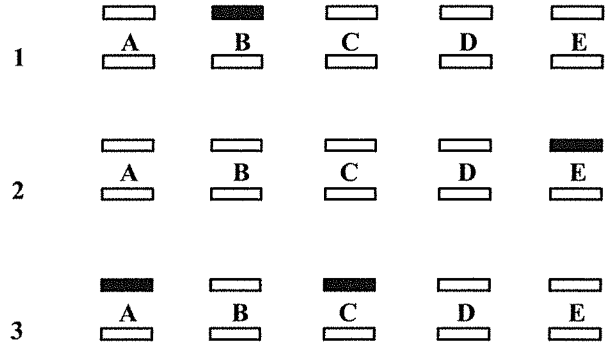
EXEMPLES DE RÉPONSES :

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



PARTIE 1

Les questions concernent les lois de probabilités et leurs propriétés classiques.

Question 1 Soit Ω un espace probabilisé, quels que soient A , B et C trois évènements de Ω, de probabilités non nulles, vérifiant $A \subset B \subset C$. On peut affirmer dans tous les cas que :

A) $p(A/A \cap B) = 1$

B) $p(B/A \cap B) = 1$

C) $p((A \cap B)/C) = p(A/C)\, p(B/C)$

D) $p((A \cup B)/C) = p(B)$

Question 2 Quelles que soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et définies sur un même espace probabilisé Ω. On a :

A) $p((X = 3) \cup (Y = 3)) = p(X = 3) + p(Y = 3)$

B) $p(X \leq 3) = \sum\limits_{k=0}^{k=+\infty} p(X \leq 3)p(Y = k)$

C) $p((X = 3) \cap (Y = 3)) = p(X = 3)p(Y = 3)$

D) $p(X + Y = 5) = p(X = 1) + p(Y = 4)$

Question 3 On peut affirmer que :

A) Quelle que soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson, l'espérance de X est égale à la racine carrée de la variance de X

B) Si une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ a une espérance différente de sa variance alors elle ne suit pas une loi de Poisson

C) Si une variable aléatoire discrète a une espérance égale à sa variance alors elle suit une loi de Poisson

D) Si deux variables indépendantes X et Y suivent des lois de Poisson, alors $X + Y$ suit aussi une loi de Poisson

Question 4 On peut dire que :

A) Pour tout n entier naturel non nul on considère la variable X_n qui suit une loi binomiale de paramètres $(n; p_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}$

B) Une loi binomiale de paramètres $(100; 0.2)$ peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre 2

C) Une loi binomiale de paramètres $(500; 0.5)$ peut être considérée comme la somme de 500 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi binomiale

D) La somme de 100 variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé Ω et suivant la même loi de Poisson de paramètre 2, suit toujours une loi de Poisson de paramètre 200

Question 5 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $(n; p)$ avec $n > 0$. On peut dire que :

A) $p(X \geq n) = 0$

B) Pour tout entier k compris entre 1 et n , $p(X = k) = p^k(1 - p)^{n-k}$

C) $p(X = 1) = np(1 - p)^{n-1}$

D) $Var(X) = np(1 - p)$

Question 6 Soient X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $(5; 0.1)$ et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $(5; 0.3)$. Alors :

A) $X + Y$ suit toujours une loi binomiale de paramètres $(5; 0.4)$

B) Si X et Y sont indépendantes alors $X - Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(5; 0.2)$

C) Si X et Y sont indépendantes alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(5; 0.4)$

D) Si X et Y sont indépendantes alors $p(X = Y) = \sum\limits_{k=0}^{k=5} \frac{14400}{k!(5-k)!}(0.03)^k(0.63)^{5-k}$

Tournez la page S.V.P.

Question 7 Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** . X suit une loi binomiale de paramètres $(5; 0.1)$ et Y une loi de Poisson de paramètre 0.5. Alors on peut dire que :

A) La série génératrice de X est un polynôme de degré 5

B) La série génératrice de Y a pour rayon de convergence 1

C) $Var(X + 3Y) = 1.95$

D) $E(X + 3Y) = 2$

Question 8 α, β, γ étant trois réels , on considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

On peut dire que :

A) La matrice N est diagonalisable si et seulement si les réels α, β, γ sont tous distincts

B) Il existe trois réels uniques α, β, γ tels que la matrice N soit nilpotente

C) Si les réels α, β, γ sont tous distincts alors les espaces propres sont tous de dimension 1

D) Si les réels α, β, γ sont tous égaux alors N est diagonalisable

Question 9 Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** qui suivent respectivement des lois binomiales de paramètres $(m; \alpha)$ et $(n; \alpha)$ avec $m > n$ et Z et T deux variables aléatoires **indépendantes** qui suivent respectivement des lois de Poisson de paramètres β et γ .
On suppose que X , Y, Z et T sont indépendantes entre elles. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} X+Y & 1 & 1 \\ 0 & Z+T & -1 \\ 0 & 0 & X+Y \end{pmatrix}$$

On peut affirmer que :

A) L'évènement "M n'est pas inversible" a la même probabilité que l'évènement "$Z = -T$ "

B) La probabilité de l'évènement "M est nilpotente" est $(\frac{1-\alpha}{e})^{\beta+\gamma}$

C) La probabilité que M ait un espace propre de dimension 2 est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(Z + T = k + 1)p(X + Y = k)$$

D) La probabilité que M soit diagonalisable sachant que $(X + Y = 0)$ est $e^{-\beta-\gamma}$

Question 10 n étant un entier naturel non nul, on considère X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** à valeurs entières, de même loi uniforme sur $\{-n, ..., n\}$.

A) $p(X = Y) = \dfrac{1}{2n+1}$

B) $p(X \leq Y) = 0.5 + \dfrac{1}{2n+1}$

C) $p(X \geq Y) = 0.5 - \dfrac{1}{2n+1}$

D) Les variables X et $-X$ suivent la même loi

Question 11 On dispose de deux dés cubiques classiques et de 11 urnes $\mathcal{U}_2$, ...,$\mathcal{U}_{12}$.
Chaque urne $\mathcal{U}_k$ contient 15 boules dont k boules noires, les autres boules étant blanches.
L'expérience est la suivante :
On lance les dés et l'on tire une boule dans l'urne dont le numéro est la somme des nombres affichés par les dés. On note A_k l'évènement "la boule tirée provient de l'urne $\mathcal{U}_k$".
On note N l'évènement "la boule tirée est noire".

A) La formule suivante : $p(N) = \frac{1}{10} \sum_{k=2}^{k=12} \frac{k}{15}$ est correcte pour calculer $p(N)$

B) La probabilité que la boule provienne de l'urne $\mathcal{U}_{10}$ sachant que la boule tirée est noire est : $\frac{1}{18p(N)}$

C) On effectue quatre tirages successifs indépendants. La probabilité d'avoir au moins une boule noire est : $1 - (p(N))^4$

D) On note Z la variable égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue de quatre tirages.
Alors : $E(Z) = 4p(N)$.

Question 12 On considère une expérience aléatoire ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience jusqu'à l'obtention de m succès, pour tout entier m, on note T_m la variable aléatoire égale au nombre d'expériences nécessaires.

A) Si $m > 1$ alors T_m suit une loi binomiale de paramètres $(m;p)$

B) T_1 suit une loi géométrique de paramètre p

C) Pour tout entier n, $n \geq m$, $p(T_m = n) = p^m(1-p)^{n-m}$

D) $E(T_2) = \frac{1}{p}$.

Question 13 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est définie par :
$\forall k \in \mathbb{N}$, la probabilité de $(X = k)$ est $a\frac{(k+2)(k+1)}{2}p^k$, avec $a > 0$ et $p \in]0;1[$

A) Pour que X soit bien une variable aléatoire il faut que $a = (1-p)^2$

B) La série génératrice de X est $G_X(t) = \frac{a}{(1-pt)^3}$

C) $E(X) = \frac{p}{1-p}$

D) $E(X) = \frac{3p}{1-p}$

Question 14 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des séries génératrices notées respectivement G_X et G_Y alors :

A) $G_X(1) = 0$

B) $G_{X+Y}(1) = 1$

C) Dans tous les cas : $Var(X) = G''_X(1) - (G'_X(1))^2$

D) $G_{X+Y} = G_X G_Y$

PARTIE 2

Question 15 f est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que son polynôme caractéristique soit :
$\chi_f = (X-a)(X-b)(X-c)$, a,b,c étant trois nombres complexes. I_d est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^3$.

A) f est toujours diagonalisable

B) f n'est pas toujours diagonalisable

C) On a toujours $Ker(f - aI_d) + Ker(f - bI_d) + Ker(f - cI_d) = \mathbb{C}^3$

D) Si les trois nombres complexes a,b,c, sont tous distincts, alors :
$(f - aI_d) \circ (f - bI_d) \circ (f - cI_d) = 0_{L(\mathbb{C}^3)}$

Question 16 A est une matrice de $M_n(\mathbb{R}), n > 0$, de polynôme caractéristique χ_A, alors :

A) χ_A est toujours scindé dans $\mathbb{R}[X]$

B) χ_A est toujours scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$

C) χ_A est toujours irréductible dans $\mathbb{C}[X]$

D) Si $n = 3$, A a toujours au moins une valeur propre réelle

Question 17 Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

A) A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

B) A est semblable a une matrice triangulaire inférieure

C) A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D) Le produit des valeurs propres est égal au produit des termes diagonaux de la matrice A

Question 18 Soit B une matrice de $M_3(\mathbb{C})$,b un nombre complexe : $B = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ b & 0 & i \end{pmatrix}$ alors :

A) Si $b = 0$, alors B est diagonalisable car toute matrice symétrique est diagonalisable

B) Quel que soit b, B est semblable a une matrice triangulaire inférieure

C) Quel que soit b, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

D) Quel que soit b, l'espace propre associé à la valeur propre i est de dimension 2

Question 19 Soit le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} 0= \; x+y+z \\ 0=x^2+y^2+z^2 \\ 0=x^3+y^3+z^3 \end{cases}$$

alors on peut dire que :

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x = y = z = 0$

B) Il n'existe pas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ pour lequel la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$ est inversible

C) Ce système n'a aucune solution telle que $x \neq y$.

D) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $x = y$

Question 20 Soit M une matrice nilpotente non nulle de $M_n(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N}\,; n > 1)$
De manière générale, on peut dire que :

A) Pour tout entier naturel p non nul, $M^p = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

B) 0 est toujours valeur propre simple de M

C) M est de rang $n-1$

D) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall k \geq p, M^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

Question 21 a,b,c, étant trois nombres complexes, on considère la matrice de $M_3(\mathbb{C})$, $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ alors :

A) Le polynôme caractéristique de N est :

$$(X-(a+b+c))(X-\frac{2a-b-c+i\sqrt{3}(b-c)}{2})(X-\frac{2a-b-c-i\sqrt{3}(b-c)}{2})$$

B) Le polynôme caractéristique de N peut toujours s'écrire :

$$(X-(a+b+c))(X-\frac{2a-b-c+i\sqrt{3}|b-c|}{2})(X-\frac{2a-b-c-i\sqrt{3}|b-c|}{2})$$

C) N est nilpotente si et seulement si $a=b=0$

D) Pour tout entier n non nul, $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$ *tel que* $N^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ c_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & a_n \end{pmatrix}$

Dans les questions suivantes, nous allons étudier les matrices M de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $n>1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \leq n, tr(M^k)=0$.

Question 22 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_3(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3 soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus un de ses termes diagonaux est nul

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = 0_{M_3(\mathbb{C})}$

Question 23 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_4(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4 soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus deux de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$ est la matrice nulle

Question 24 Soit M une matrice de $M_4(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4 soit nulle.

A) Cette matrice est semblable à une matrice nilpotente

B) Au plus trois de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$ est la matrice nulle

Question 25 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_n(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4,....,trM^n soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus $n-1$ de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) Cette matrice est semblable à une matrice nilpotente.

Question 26 Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4,...., trM^n soit nulle.

A) Cette matrice est nilpotente

B) Au plus $n-1$ de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) Quel que soit le réel a, $I_n + aM$ est inversible

PARTIE 3

Exercice 1

Dans cet exercice, on introduit les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ de la façon suivante : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels strictement positifs.

$$f(0) = a_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in [n; n+1[\ \ f(t) = a_n$$

A chaque fonction f, on associe sa fonction transformée $T(f)$ définie par $T(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ où $p \in \mathbb{R}^{+*}$.
On supposera que les fonctions f envisagées sont telles que l'intégrale précédente est convergente pour tout réel p appartenant à un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.
Pour tout β réel positif, on définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction translatée de f : $f_\beta : t \to f(\beta + t)$.

Question 27 On a alors :

A) $T(f_1)(p) = \int_1^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

B) $T(f_1)(p) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

C) $T(f_1)(p) = e^p \int_{-1}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

D) $T(f_1)(p) = e^p \int_1^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

Question 28 On peut dire que :

A) $T(f_1)(p) = a_0 e^p T(f)(p) - a_1 \dfrac{e^p}{p}$

B) $T(f_1)(p) = a_1 e^p T(f)(p) - a_0 \dfrac{e^p}{p}$

C) $T(f_1)(p) = e^p T(f)(p) - a_1 \dfrac{e^p - 1}{p}$

D) $T(f_1)(p) = e^p T(f)(p) - a_0 \dfrac{e^p - 1}{p}$

Question 29 On peut écrire :

A) $T(f_2)(p) = a_0 e^{2p} T(f)(p) - a_1 \frac{e^p}{p} + a_2 \frac{e^p - 1}{p}$

B) $T(f_2)(p) = a_2 e^{2p} T(f)(p) - a_1 \frac{e^p}{p} + a_0 \frac{e^p - 1}{p}$

C) $T(f_2)(p) = \frac{a_0 e^{2p} T(f)(p)}{p} - (e^p - 1)(a_0 e^p - a_1)$

D) $T(f_2)(p) = e^{2p} T(f)(p) - \frac{(e^p - 1)}{p}(a_0 e^p + a_1)$

Question 30 Soit r un réel strictement positif . On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$g(0) = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in [n; n+1[\quad g(t) = r^n$$

A chaque fonction g, on associe sa fonction transformée $T(g)$.

A) $T(g)(p) = \frac{p(1 + e^r)}{1 - e^{-r}}$

B) $T(g)(p) = \frac{(1 + e^r)}{p(1 - e^{-r})}$

C) $T(g)(p) = \frac{(1 - e^{rp})}{p(1 - e^{-p})}$

D) $T(g)(p) = \frac{(1 - e^{-p})}{p(1 - re^{-p})}$

Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \;\; avec \;\; a_0 = 0 \;\; et \;\; a_1 = 1$$

A chaque suite on associe la fonction f définie précédemment. Cette fonction vérifie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$(E) : f_2 - 5f_1 + 6f = 0$$

Question 31 On déduit des relations précédentes la valeur de $T(f)(p)$:

A) $T(f)(p) = \frac{p(1 - e^p)}{e^{-p}}(\frac{1}{2 - e^p} + \frac{1}{3 - e^p})$

B) $T(f)(p) = \frac{p(1 - e^p)}{e^{-p}}(\frac{1}{e^p + 3} + \frac{1}{e^p + 2})$

C) $T(f)(p) = \frac{(e^p - 1)}{p}(\frac{1}{e^p - 3} - \frac{1}{e^p - 2})$

D) $T(f)(p) = \frac{(e^p - 1)}{p}(\frac{3}{e^p - 3} - \frac{2}{e^p - 2})$

Question 32 On peut en déduire la valeur du terme général de la suite (a_n) sous la forme :

A) $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$

B) $a_n = (2^{2n} - 3^n)$

C) $a_n = (3^n - 2^n)$

D) $a_n = (2^n - 1)$

On considère maintenant les deux suites réelles (p_n) et (q_n) définies par les relations de récurrences suivantes avec $(p_0 = q_0 = 1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

Question 33 On a alors les relations suivantes.

A) $p_{n+2} = p_n - 3p_{n+1}$

B) $p_{n+2} = p_n + 2p_{n+1}$

C) $q_{n+2} = q_n + 2q_{n+1}$

D) $q_{n+2} = q_n - 3q_{n+1}$

Question 34 On associe comme précédemment pour la suite (a_n) , à chacune des suites (p_n) et (q_n) une fonction. On désigne par h la fonction associée à la suite (p_n) et par $T(h)$ sa transformée.On a :

A) $T(h)(p)(e^{2p} + 3e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{p} = 0$

B) $T(h)(p)(e^{2p} + 3e^p - 1) - \dfrac{e^{-p}(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{2p} = 0$

C) $T(h)(p)(e^{2p} - 2e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{p} = 0$

D) $T(h)(p)(e^{2p} - 2e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-p})(1 + e^p)}{p} = 0$

Question 35 Dans la suite, on définit la suite (v_n) par : $v_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ pour tout entier naturel n.On peut conclure :

A) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2\sqrt{2}$

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1 + \sqrt{2}$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2} - 1$

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2}$

Exercice 2

u_0 et a étant deux réels strictement positifs, on considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$$

On associe naturellement à cette suite la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

Question 36 On peut dire que :

A) La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x/a$.

B) $\forall x > 0, f(x) \geq 0$

C) f admet un maximum en $x = \sqrt{a}$ et $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$

D) $\forall x > 0, f^{'}(x) \geq 0$

Question 37 On peut écrire que :

A) La suite (u_n) est croissante pour $u_0 > \sqrt{a}$ et décroissante pour $u_0 < \sqrt{a}$

B) La suite (u_n) est décroissante pour $u_0 > \sqrt{a}$ et croissante pour $u_0 < \sqrt{a}$

C) Quel que soit u_0, la suite (u_n) est croissante

D) Quel que soit u_0, la suite (u_n) est décroissante

Question 38 En calculant les expressions :$E = u_{n+1}^2 - a$ et $F = u_{n+1} - \sqrt{a}$, on obtient :

A) $E = (\frac{u_n^2 + a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{u_n}{2}(u_n - \sqrt{a})^2$

B) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{u_n}{2}(u_n + \sqrt{a})^2$

C) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{a})^2$

D) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$

Question 39 On peut dire que :

A) La suite (u_n) est croissante et convergente seulement si $u_0 > \sqrt{a}$

B) La suite (u_n) est décroissante et convergente seulement si $u_0 > \sqrt{a}$

C) $\forall u_0 \neq \sqrt{a}$, la suite (u_n) est croissante et convergente

D) $\forall u_0 \neq \sqrt{a}$, la suite (u_n) est décroissante et convergente

Question 40 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On définit la suite matricielle (M_n) par : $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n + AM_n^{-1})$
On obtient alors :

A) $\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

C) $\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$