CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2026

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE 1

Question 1 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 1 : Pour tout réel x, $|x+2|+|x-1| = d(x,-2)+d(x,1) \geqslant d(-2,1) = 3$. En particulier, pour tout réel x, $|x+2|+|x-1| \neq 1$. Donc, $\mathscr{S} = \varnothing$. B est vrai et le reste est faux.

Question 2 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 2 : Pour tout réel x, $|x+2|+|x-1| \geqslant 3$ et donc pour tout réel x, $|x+2|+|x-1| \geqslant 1$. Par suite, $\mathscr{S} = \mathbb{R}$. C est vrai et le reste est faux.

Question 3 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 3 : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3+i)\right)^2 = \dfrac{1}{2}(9+6i-1) = 4+3i$. C est vrai et donc A est vrai. B et D sont nécessairement faux. En effet, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-3+i)\right)^2 = 4-3i$ et $(9+i)^2 = 80+18i$

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 4 : La somme des deux nombres $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-i\right)$ et $z_2 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+i\right)$ est

$$z_1+z_2 = \frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{3}-3+\left(-\sqrt{3}+1-1-\sqrt{3}\right)i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i) \neq \sqrt{\frac{3}{2}}(1+i) = -\frac{b}{a}.$$

Donc, A est faux. De même avec les nombres de D, $z_1+z_2=-\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\neq-\dfrac{b}{a}$. D est faux.

Si les deux solutions z_1 et z_2 sont conjuguées, alors $\sqrt{\dfrac{3}{2}}(1+i)=z_1+z_2=2\mathrm{Re}\,(z_1)\in\mathbb{R}$ ce qui est faux. Donc, C est faux. Enfin, on ne peut dire qu'un complexe non réel est positif ou négatif et donc B est faux.

Question 5 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : Soit $t\in\mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation proposée est

$$\Delta=((1+i)t)^2+4=((1+i)t)^2-(2i)^2=((1+i)t-2i)((1+i)t+2i)$$

puis

$$\Delta=0\Leftrightarrow t=\frac{2i}{1+i}\text{ ou }t=-\frac{2i}{1+i}\Leftrightarrow t=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}\text{ ou }t=-\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Leftrightarrow t=1+i\text{ ou }t=-(1+i).$$

Si $t_0=1+i$, $\mathscr{E}_t$ est un singleton $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow t\in\{t_0,-t_0\}$ puis B est vrai. D'autre part, si t est réel, alors $\Delta\neq0$ et $\mathscr{E}_t$ est constitué de deux nombres complexes distincts. A est vrai.
C et D sont donc nécessairement faux. C est faux car $z_1+z_2=t(1+i)\notin\mathbb{R}$ si $t\in\mathbb{R}^*$ et D est faux car

$$\begin{aligned}z^2-\frac{1+i}{\sqrt{2}}z-1=0&\Rightarrow 1=z\left(z-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\Rightarrow 1=|z|\left|z-e^{\frac{i\pi}{4}}\right|\\&\Rightarrow 1\leqslant|z|\left(|z|+\left|e^{\frac{i\pi}{4}}\right|\right)=|z|(|z|+1).\end{aligned}$$

PARTIE 2

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 : $I_1=\displaystyle\int_0^1\left(1-t^3\right)\,dt=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Tout est faux.

Question 7 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 7 : Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_0^1 t^3\left(1-t^3\right)^n\,dt=\int_0^1\left(t^3-1+1\right)\left(1-t^3\right)^n\,dt=-\int_0^1\left(1-t^3\right)^{n+1}\,dt+\int_0^1\left(1-t^3\right)^n\,dt=I_n-I_{n+1}.$$

Donc, D est vrai et A est faux. Ensuite, $\displaystyle\int_0^1 t^3\left(1-t^3\right)^0\,dt=\frac{1}{4}$ mais $3I_0+I_1=3+\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{1}{4}$ et $I_1-2I_0=\dfrac{3}{4}-2\neq\dfrac{1}{4}$. Donc, B et C sont faux.

Question 8 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{3(n+1)}\left(1-t^3\right)^{n+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 t \times t^2\left(1-t^2\right)^n \ dt = \left[t \times -\frac{1}{3(n+1)}\left(1-t^3\right)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{3(n+1)}\left(1-t^3\right)^{n+1} \ dt \\ &= \frac{1}{3(n+1)} I_{n+1}\end{aligned}$$

puis $\left(1+\dfrac{1}{3(n+1)}\right) I_{n+1} = I_n$ et donc $I_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{3n+4} I_n$. A est vrai et le reste est faux

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 9 : Pour tout réel x, d'après la formule du binôme de Newton,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\int_0^1 t^{3k} \ dt\right) x^k.$$

Donc, f_n est une fonction polynomiale de degré n. D est vrai et le reste est faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 10 : Le coefficient dominant de f_n est

$$\operatorname{dom}(f_n) = (-1)^n \binom{n}{n} \int_0^1 t^{3n} \ dt = \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n = f_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\int_0^1 t^{3k} \ dt\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3k+1}$. C est vrai et le reste est faux.

PARTIE 3

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 : $S + T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. C est vrai et le reste est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 13 : $S - T = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ puis

$$S = \frac{1}{2}(S + T + S - T) = \frac{e + e^{-1}}{2}.$$

Tout est faux. (Les élèves en 2ème année de classes préparatoires savent que pour tout x, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x)$.)

Question 14 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 : A est faux car $u_n = \frac{1}{n+1} \underset{n \to 0}{\to} 0$ mais $\sum u_n$ diverge.

Ensuite, si $u_n \underset{n \to 0}{\to} 0$, alors, $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \to -u_0$. B est vrai.

Si $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, alors $u_n \underset{n \to 0}{\to} 0$ puis $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$ puis $\sum \ln(1 + u_n)$ converge. C est faux.

Si $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n \underset{n \to 0}{\to} 0$ mais u_n n'est pas négligeable devant $\frac{1}{n}$. D est faux.

Question 15 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 15 : Si on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k + u_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n+1} u_k\right) = \frac{1}{2}\left(S_n + S_{n+1} - u_0\right) \underset{n \to +\infty}{\to} S - \frac{u_0}{2}.$$

Donc, A est vrai et B est faux. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2\sqrt{u_n u_{n+1}} + u_{n+1} = \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 \geqslant 0$ et donc

$$0 \leqslant \sqrt{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

Par suite, $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. C est vrai et D est faux.

Question 16 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 16 : Puisque $\sum u_n^2$ converge, $u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ puis $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Mais alors, $u_n^3 \underset{n \to +\infty}{=} o\left(u_n^2\right)$ puis $\sum u_n^3$ converge. D est vrai et C est faux.

Si $u_= \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$, alors $\sum u_n^2$ converge mais $\sum u_n$ diverge. Donc, B est faux.

Enfin, $\left(u_n - \dfrac{1}{n+1}\right)^2 \geqslant 0$ fournit $0 \leqslant \dfrac{u_n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$. Ainsi, si $\sum u_n^2$ converge, puisque d'autre part $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge, on en déduit que $\sum \dfrac{u_n}{n+1}$ converge. A est vrai.

PARTIE 4

Question 17 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 17 :

$$\begin{aligned} P &= X^5 + 2X^3 - 3X^4 - 6X^2 + 3X^3 + 6X - X^2 - 2 + 4X + 3 = \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right)\left(X^2 + 2\right) + 4X + 3 \\ &= (X-1)^3\left(X^2 + 2\right) + 4X + 3. \end{aligned}$$

avec $\deg(4X+3) < \deg\left(X^2+2\right)$. Le quotient et le reste de la division euclidienne de P par X^2+2 sont respectivement $Q_0 = (X-1)^3$ et $R_0 = 4X+3$. A est vrai et le reste est faux.

Question 18 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 18 : $R \neq 0$. Donc, X^2+2 ne divise pas P ou encore P n'est pas multiple de X^2+2. A et B sont faux.

Les éléments non nuls de F sont de degré supérieur ou égal à 2. Donc, $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$. D'autre part, pour tout $\Pi \in \mathbb{R}[X]$, la division euclidienne de Π par X^2+2 s'écrit $\Pi = Q\left(X^2+2\right) + R$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$. Donc, $\mathbb{R}[X] = F + \mathbb{R}_1[X]$. Finalement, $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$. D est vrai.

Supposons qu'il existe $(\lambda, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tel que $1 = \lambda P + \left(X^2+2\right)Q = \lambda(4X+3) + (\lambda Q_0 + Q)\left(X^2+2\right)$. Si $\lambda Q_0 + Q \neq 0$, alors $\deg\left(\lambda P + \left(X^2+2\right)Q\right) \geqslant 2 > \deg(1)$. Donc, $\lambda Q_0 + Q = 0$ puis $\lambda(4X+3) = 1$ ce qui est impossible. C est faux.

Question 19 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : D'après la question 17, $P-(4X+3)=(X-1)^3\left(X^2+2\right)$. Donc, A est vrai et le reste est faux.

Question 20 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 20 : Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim(E)<\dim(F)$ puis $\mathrm{Im}(f)\neq F$. f n'est jamais surjective. A est faux.
Puisque $E\neq\{0\}$, l'application nulle de E vers F n'est pas injective. B est faux.
S'il existe un isomorphisme de E sur F, alors $\dim(E)=\dim(F)$ ce qui est faux. Donc, C est faux.
Soient $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=\left(e'_1,\ldots,e'_p\right)$ des bases de E et F respectivement (avec $n<p$). Soit f l'application linéaire de E vers F définie par : pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f\left(e_i\right)=e'_i$. Soit $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ie_i\in E$.

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{Ker}(f)&\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_if\left(e_i\right)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_ie'_i=0\\&\Rightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0\ \text{(car }\left(e'_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\text{ est libre)}\\&\Rightarrow x=0.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ puis f est injective. D est vrai.

Question 21 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : $\mathrm{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et donc B est faux. Ensuite,

$$\mathrm{Im}(f+g)=\{f(x)+g(x),\ x\in E\}\subset\left\{f(x)+g(x'),\ (x,x')\in E^2\right\}=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(f+g)&=\dim(\mathrm{Im}(f+g))\\&\leqslant\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g))\\&\leqslant\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(g))=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g).\end{aligned}$$

A est vrai. Ensuite, on prend $f=g=0$. Alors, $\mathrm{rg}(f+g)=0=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$. Donc, C est vrai. Enfin, si $f=0$, $\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(E)>0=\mathrm{rg}(f)$. Donc, D est faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 22 : On sait que $1+j+j^2=0$. Par exemple, $1+j+j^2=1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}=1+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$. Donc, C est vrai et le reste est faux.

Question 23 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 23 : $A=CC^T=\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&j&j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}$. C est vrai et le reste est faux.

Question 24 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 24 : $C^TC=1\times1+j\times j+j^2\times j^2=1+j^2+j^4=1+j^2+j=0$ et donc $A^2=CC^TCC^T=0$. Donc, C est vrai (car $1+j+j^2=0$) et B et D sont faux. A est faux car A^2 n'est pas un nombre mais une matrice $(3,3)$.

Question 25 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 25 : $A^2=0$ puis $\text{rg}\left(A^2\right)=0$. A est vrai et le reste est faux.

Question 26 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 26 : Le déterminant de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&2&1\\5&1&0\end{vmatrix}\\&=2(-2-10)-(1+5)\text{ (en développant suivant la dernière colonne)}\\&=-30\notin\{-1,0,1\}.\end{aligned}$$

Donc, B est vrai mais A est faux. Puis D est faux car la famille (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$.
$\langle e_1, e_2\rangle = -1 - 4 + 5 = 0$, $\langle e_1, e_3\rangle = 2 - 2 = 0$ et $\langle e_2, e_3\rangle = -2 + 2 = 0$. Donc, C est vrai.

Question 27 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 27 : (e_1, e_2) est libre puis $\dim(F) = 2$ et donc $\dim\left(F^\perp\right) = 1$. A est faux. Il est d'autre part connu que B est faux. D est faux car $F^\perp$ n'est pas de dimension $3 - 1 = 2$.
Enfin, $F^\perp = (e_1, e_2)^\perp = \text{Vect}\,(e_3)$. Puisque $(1, 0, 0)$ n'est pas colinéaire à e_3, C est faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$p_{F^\perp}(u) = p_{e_3}(u) = \frac{\langle u, e_3\rangle}{\|e_3\|^2}e_3 = \frac{2x + y}{5}(2, 1, 0)$$

puis

$$p_F(u) = u - p_{F^\perp}(u) = (x, y, z) - \frac{2x + y}{5}(2, 1, 0) = \frac{1}{5}(x - 2y, -2x + 4y, 5z).$$

La matrice demandée est donc $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tout est faux. (Si on sait que la trace de la matrice doit être le rang de p_F à savoir 2, on élimine immédiatement les quatre matrices proposées.)

PARTIE 5

Question 29 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 29 : X et Y suivent la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. C et D sont vrais et A et B sont faux.

Question 30 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y)&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=k\})\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=k)\text{ (car X et Y sont indépendantes)}\\&=\sum_{k=0}^{n}(\mathbb{P}(X=k))^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2k}}\binom{n}{k}^2.\end{aligned}$$

Pour $n=2$, on obtient en particulier $2+\frac{1}{16}$. Donc, C et D sont faux. A est faux car la somme proposée vaut $2\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=2$. B est faux car la somme proposée est $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

Question 31 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 31 : Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note E_k l'événement « on choisit l'urne numéro k » et on note R_1 l'événement « on obtient une boule rouge au premier tirage ». D'après la formule des probabilités totales, en tenant compte du fait que $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(R_1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

A est vrai et le reste est faux.

Question 32 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 32 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{R_1}\left(R_2\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(R_1 \cap R_2\right)}{\mathbb{P}\left(R_1\right)} = \frac{2n}{n+1}\mathbb{P}\left(R_1 \cap R_2\right) \\ &= \frac{2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \text{ (y compris quand } k=1) \\ &= \frac{2}{n(n-1)(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)(n+1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{n(n-1)(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

B est vrai et le reste est faux.

PARTIE 6

Question 33 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 33 : $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x \end{pmatrix}$ et en particulier $\nabla(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C est vrai et le reste est faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 34 : Une équation du plan tangent P à la surface d'équation $z = f(x,y)$ en le point (x_0, y_0, z_0) tel que $z_0 = f\left(x_0, y_0\right)$, est

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right).$$

Ici, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ puis $z_0 = f(3,2) = 9 - 6 + 3 = 6$. Ensuite, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 2 \times 3 - 2 = 4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = -3$. Une équation de P est donc $z = 6 + 4(x-3) - 3(y-2)$ ou encore $z = 4x - 3y$. D est vrai et le reste est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 35 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = -x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. f possède exactement un point critique à savoir le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$. B est vrai et le reste est faux.

Question 36 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f a un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce ne peut être qu'en le point critique $(0, 0)$.

$f(0, 0) = 3$ puis $f(x, y) - f(0, 0) = x(x - y)$. En particulier, pour tout réel non nul x, $f(x, 0) - f(0, 0) = x^2 > 0$ et $f(x, 2x) - f(0, 0) = -x^2 < 0$. $f - f(0, 0)$ change de signe dans tout voisinage de $(0, 0)$ et donc f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$. A est vrai et B et C sont faux.

Enfin, $f(x, 0) = x^2 + 3 \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$. f n'est pas bornée puis D est faux.