# CONCOURS DE RECRUTEMENT

# D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

## ANNEE 2022

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

---

# PARTIE I

**Question 1 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 1 :** Soit $n \geqslant 2$. La formule du binôme de Newton fournit :

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = 1 + n\times\frac{1}{n} + \sum_{p=2}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}\times\frac{1}{n^p} \\ = 2 + \sum_{p=2}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!n^p}. \end{aligned}$$

B est vrai et le reste est faux

**Question 2 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 2 :** Soient $n \geqslant 2$ puis $p \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p} &= \left(1-\frac{0}{n}\right)\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{p-1}{n}\right) \\ &\leqslant \left(1-\frac{0}{n+1}\right)\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{p-1}{n+1}\right) = \frac{(n+1)n\dots(n+1-p+1)}{(n+1)^p}, \end{aligned}$$

puis $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!n^p} \leqslant \dfrac{(n+1)n\dots(n+1-p+1)}{p!(n+1)^p}$ et donc A est vrai. Ensuite, pour B et D, quand $p = n$, il s'agit de comparer $\dfrac{n!}{n^{n+1}}$ et $\dfrac{(n+1)!}{2(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n!}{2(n+1)^n}$. Or

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{n!}{n^{n+1}} - \frac{n!}{2(n+1)^n}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n^{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)^n}\right) = \operatorname{sgn}\left((n+1)^n - \frac{1}{2}n^{n+1}\right) = \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \frac{n}{2}\right).$$

Quand $n = 2$, la dernière expression vaut $\dfrac{9}{4} - 1 > 0$. Mais pour $n$ grand, l'expression est strictement négative car il est connu que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge (vers $e$). Donc, B et D sont faux.

Quand $p = n$, l'inégalité C s'écrit $\dfrac{n!}{n^n} \geqslant \dfrac{(n+1)!}{2(n+1)^n}$ ou encore $\dfrac{1}{n^n} \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)^{n-1}}$ ou enfin $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1} \geqslant \dfrac{n}{2}$. Cette inégalité est fausse pour $n$ grand car

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e.$$

C est faux.

**Question 3 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 3 :** $x_2 = \dfrac{9}{4} = 2,25$ et $x_3 = \dfrac{64}{27} = 2,3\ldots > x_2$. Donc, B et D sont faux. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!n^p} \\ &\leqslant 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{(n+1)n\ldots(n+1-p+1)}{p!(n+1)^p} < 2 + \sum_{p=2}^{n+1} \frac{(n+1)n\ldots(n+1-p+1)}{p!(n+1)^p} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante. En particulier, A est vrai et C est faux.

On note que la phrase « pour tout entier $n > 2$, la suite $x_n$ est croissante » n'a aucun sens (elle affirme par exemple que pour $n = 3$, la suite $x_3$ est croissante).

**Question 4 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 4 :** L'inégalité A est fausse quand $p = 1$ et l'inégalité B est fausse quand $p = 3$ car $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{4}$. Donc, A et B sont faux. Par contre, pour $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{p!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \ldots \times p} \leqslant \frac{1}{2 \times 2 \times \ldots \times 2} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p!} \\ &\leqslant 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} = 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^n} \\ &< 3. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!n^p} \leqslant \dfrac{n.n\ldots n}{p!n^p} = \dfrac{1}{p!}$ et donc

$$x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!n^p} \leqslant 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p!} = y_n.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_n \leqslant y_n < 3$. C est vrai et D est faux.

 

**Question 5 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 5 :** La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée par 3. Donc, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel $\overline{x}$ inférieur ou égal à 3. A et B sont faux. Ensuite,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{1+o(1)}$$

et donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\overline{x} = e = 2,71\ldots < 3$. C est faux et D est vrai.

**Question 6 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 6 :** Soient $k \geqslant 2$ puis $n \geqslant k$.

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n^n} \\ &\geqslant 2 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc, C est vrai. Quand $k = 2$, B fournit pour tout $n \geqslant 2$, $x_n \leqslant 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $e \leqslant 2,5$ ce qui est faux. Donc, B est faux.
Quand $k = 3$, A fournit pour $n \geqslant 2$, $x_n \geqslant 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $e \geqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2,8\ldots$ ce qui est faux. Donc, A est faux.

Quand $n = k$, l'inégalité D s'écrit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ puis quand $n = k = 3$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \geqslant 2 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. Or, $\frac{64}{27} = 2,37\ldots$ et $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = 2,38\ldots$ Donc, D est faux.

**Question 7 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 7 :** D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant 2$ et tout $n \geqslant k$, $x_n \geqslant 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$. $k$ étant fixé, quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $\overline{x} \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k$. D'après la question 4, on a alors :

$$\forall n \geqslant 2,\ x_n \leqslant y_n \leqslant \overline{x}.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\overline{y} = \overline{x}$. B est vrai et le reste est faux.

 

# PARTIE II

**Question 8 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 8 :** On sait que $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2^2 = 4$. A est faux et B est vrai.
$I_2$ et $-I_2$ sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mais $I_2 + (-I_2) = 0_2$ n'est pas dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Donc, C est faux. Enfin, on sait que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. Donc D est vrai.

**Question 9 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 9 :** Il est connu que $M_{i,j} \times M_{k,l} = \delta_{j,k} M_{i,l} = \left\{\begin{array}{l} M_{i,l} \text{ si } j = k \\ 0_2 \text{ sinon} \end{array}\right.$. Tout est faux.

**Question 10 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 10 :** $S = \mathrm{diag}(1, -1)$ puis pour $n \geqslant 2$, $S^n = \mathrm{diag}\left(1^n, (-1)^n\right) = \mathrm{diag}\left(1, (-1)^n\right)$. En particulier, $S^3 = S \neq I_2$ et donc A est faux puis $S^3 \neq \mathrm{diag}(-1, -1)$ et donc B est faux.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Il est connu que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ et en particulier, $R_\theta$ est inversible et $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.
Ici, $R = R_{\frac{2\pi}{3}}$ et donc $R^3 = R_{2\pi} = I_2$ puis $R^4 = R$. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \{0, 1, 2\}$. $R^{3k+l} = \left(R^3\right)^k \times R^l = I_3^k \times R^l = R^l$. Donc, D est vrai.

Enfin, $R^2 = R_{\frac{4\pi}{3}} \neq R$ et donc C est faux.

**Question 11 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** VRAI

**Explication 11 :** $I_2 + I_2 = 2I_2 \notin G_1$ et $I_2 + I_2 = 2I_2 \notin G_2$. Donc, A et B sont faux.
$I_2 \times I_2 = S \times S = I_2 \in G_1$ et $I_2 \times S = S \times I_2 = S \in G_1$. Donc, C est vrai.
Les éléments de $G_2$ sont des puissances de $R$. Le produit de deux puissances de $R$ est une puissance de $R$ qui est élément de $G_2$ d'après la question précédente. Donc, D est vrai.

 

**Question 12 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 12 :** $V(G_1) = \text{vect}(I_2, S)$. De plus, la matrice $S$ n'est pas une matrice scalaire et donc la famille $(I_2, S)$ est libre. Finalement, $(I_2, S)$ est une base de $V(G_1)$ puis $\dim(V(G_1)) = 2$. B est vrai et le reste est faux.

**Question 13 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 13 :** $V(G_2) = \text{Vect}\left(I_2, R, R^2\right)$. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) ou encore $I_2 + R + R^2 = 0_2$. Donc, $V(G_2) = \text{Vect}(I_2, R, -I_2 - R) = \text{Vect}(I_2, R)$. De plus, la famille $(I_2, R)$ est libre car $R$ n'est pas une matrice scalaire. Donc, $\dim(V(G_2)) = 2$. B est vrai et le reste est faux.

**Question 14 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 14 :** $H$ est un ensemble d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et donc A et C sont faux.
L'endomorphisme nul est dans $H$. Ensuite, si $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\varphi_1\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu\varphi_2\left(\overrightarrow{u}\right) \in \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et donc $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \in H$. Ainsi, $H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$. B est vrai.
Un sous-espace vectoriel est en particulier un sous-espace affine et donc D est vrai.

**Question 15 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 15 :** On suppose qu'il y a une erreur d'énoncé dans les questions 15 et 16. Il faut probablement lire $\text{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(p)$ dans les quatre propositions de la question 15 et $\text{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(q)$ dans les quatre propositions de la question 16.

On sait que $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est l'espace des vecteurs invariants par $p$ et que $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est le noyau de $p$. Donc, $p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ et $p\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$ puis

$$\text{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, B est vrai et le reste est faux.

**Question 16 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

 

**Explication 16 :** De même, $q\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ et $q\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$ ou encore $q\left(\overrightarrow{v}\right) = q\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ puis

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est vrai et le reste est faux.

**Question 17 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 17 :** Soit $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Posons $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{v}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$,

$$\varphi \in H \Leftrightarrow \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right) \Leftrightarrow a\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right) \Leftrightarrow d = 0.$$

$H$ est l'ensemble des endomorphismes de matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. L'ensemble de ces matrices est $\mathrm{Vect}\left(M_{1,1}, M_{1,2}, M_{2,1}\right)$ et est un donc un espace vectoriel de dimension 3. Puisque l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base donnée est un isomorphisme de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $H$ est un espace de dimension 3. C est vrai et le reste est faux.

Autre solution. $Id$, $p$ et $q$ sont dans $H$. Donc, $\mathrm{Vect}\left(Id, p, q\right) \subset H$. De plus, si $aId + bp + cq = 0$, en évaluant en $v$, on obtient $av + cu = 0$ puis $a = c = 0$ car $(u, v)$ est libre, puis $b = 0$. Donc, $(Id, p, q)$ est libre et donc $3 \leqslant \dim(H) \leqslant 4$. Mais $H \neq \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ car par exemple, la projection sur $\mathrm{Vect}(v)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$ n'est pas dans $H$. Donc, $\dim(H) = 3$.

**Question 18 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 18 :** En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\Delta = b\begin{vmatrix} b & d-a \\ -c & 0 \end{vmatrix} - (a-d)\begin{vmatrix} b & d-a \\ 0 & -c \end{vmatrix} = bc(d-a) + bc(a-d) = 0.$$

C est vrai et le reste est faux.

# PARTIE III

**Question 19 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 19 :** Soient A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « ob obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$. L'énoncé donne $P(A)\dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$, $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$ D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6}} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

D est vrai et le reste est faux.

 

**Question 20 :**
**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 20 :** On reprend le calcul précédent en prenant pour $B$ l'événement « on obtient $n$ fois le chiffre $6$ ». Donc, $P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$ puis

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4 \times 2^n}{6^n}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}.$$

B est vrai et le reste est faux.

**Question 21 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 21 :** La notion de loi à densité n'est absolument pas au programme des classes préparatoires scientifiques, même vaguement. Cette notion est au programme des classes préparatoires commerciales.

Pour $K$ partie de $T$ donnée. La probabilité de l'événement $(X, Y) \in K$ est (avec les notations de l'énoncé) $\displaystyle\iint_K p_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = \dfrac{\text{aire}(K)}{\text{aire}(T)} = 2 \times \text{aire}(K)$ puisque l'aire de $T$ est égale à $\dfrac{1}{2}$. « Donc », $p_{X,Y)}(x, y) = 21_T(x, y)$. Tout est faux.

**Question 22 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 22 :** En sommant sur $y$ à $x$ fixé, $y$ variant de $0$ à $1-x$, on obtient pour $x \in [0, 1]$, $p_X(x) = 2(1-x)1_[0, 1](x)$. C est vrai et le reste est faux.

**Question 23 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 23 :** Par symétrie des rôles, pour $y \in [0, 1]$, $p_Y(y) = 2(1-y)1_[0, 1](y)$. D est vrai et le reste est faux.

**Question 24 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

 

**Explication 24 :** A est faux car $p_{(X,Y)}(x, y) \neq p_X(x) \times p_Y(y)$ puis les variables ne sont pas indépendantes et donc D est vrai et B est faux. Enfin, $T$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ et donc C est faux.

**Question 25 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 25 :**

$$\begin{aligned}E(XY) &= \iint_T xyp_{(X,Y)}(x, y)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} 2xy\ dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)^2\ dx = \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

D est vrai et le reste est faux.

# PARTIE IV

**Question 26 :**
**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 26 :** $0$ n'est pas racine de l'équation. Soit $r = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$, une éventuelle racine rationnelle non nulle de l'équation.
Alors, $\dfrac{p^3}{q^3} - \dfrac{p^2}{q^2} + \dfrac{p}{q} + 1 = 0$ puis $p^3 - p^2q + pq^2 + q^3 = 0$ puis $p\left(p^2 - pq + q^2\right) = -q^3$ et $q\left(-p^2 + pq + q^2\right) = -p^3$. Ainsi, l'entier $p$ divise l'entier $-q^3$ et l'entier $q$ divise l'entier $-p^3$. Puisque $p$ et $q$ sont premiers entre eux, $p$ divise $1$ et $q$ divise $1$ d'après le théorème de Gauss puis $p \in \{-1, 1\}$ et $q = 1$ puis $r \in \{-1, 1\}$.

Les seules racines rationnelles possibles sont $-1$ et $1$. Mais, $1 - 1 + 1 + 1 \neq 0$ et $-1 - 1 - 1 + 1 \neq 0$. Donc, l'équation n'admet pas de racine rationnelle. A est vrai et le reste est faux.

**Question 27 :**
**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 27 :** Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si $d$ divise $u_n$ et $u_{n+1}$, alors $d$ divise $5u_n - u_{n+1} = 6$. Donc, B est vrai. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, les seuls diviseurs communs à $u_n$ et $u_{n+1}$ possibles (dans $\mathbb{N}^*$) ne peuvent être que $1$, $2$, $3$ et $6$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3$ divise $u_n$.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \equiv 0\ [3]$. Alors, $u_{n+1} \equiv 5 \times 0 - 0\ [3]$ ou encore $u_{n+1} \equiv 0\ [3]$.

Le résultat est démontré par récurrence. Mais alors, A et D sont faux. De même, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est impair. Enfin, modulo 6, $u_{n+1}$ est congru à $-u_n$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}$ est divisible par $6$ si et seulement si $u_n$ est divisible par $6$. Puisque $u_0 = 15$ n'est pas divisible par $6$, aucun des $u_n$ n'est divisible par $6$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les diviseurs communs à $u_n$ et $u_{n+1}$ sont $1$ et $3$. Donc, C est vrai.

 

**Question 28 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 28 :** D'après la question précédente, B est vrai et le reste est faux.

**Question 29 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 29 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les diviseurs communs à $u_n$ et $u_{n+1}$ sont 1 et 3 et en particulier, PGCD $(u_n, u_{n+1}) = 3$. Tout est faux.

**Question 30 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 30 :** Soit $n \in \mathbb{Z}\setminus\{4\}$. Si $n-4$ divise $3n-7$, alors $n-4$ divise $(3n-7)-3(n-4) = 5$ puis $n-4 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ puis $n \in \{-1, 3, 5, 9\}$.
Réciproquement,

- si $n = -1$, alors $n - 4 = -5$ et $3n - 7 = -10$. Dans ce cas, $n - 4$ divise $3n - 7$.
- si $n = 3$, alors $n - 4 = -1$ et $3n - 7 = 2$. Dans ce cas, $n - 4$ divise $3n - 7$.
- si $n = 5$, alors $n - 4 = 1$ et $3n - 7 = 8$. Dans ce cas, $n - 4$ divise $3n - 7$.
- si $n = 9$, alors $n - 4 = 5$ et $3n - 7 = 20$. Dans ce cas, $n - 4$ divise $3n - 7$.

Les entiers solutions sont $-1$, 3, 5 et 9. C est vrai et le reste est faux.

# PARTIE V

**Question 31 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 31 :** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $f'(x) = \left(1 + 2x^2\right)e^{x^2} > 0$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.
D est vrai et le reste est faux ($f(\mathbb{R}^+) = [0, +\infty[$ et $f(\mathbb{R}^-) = ]-\infty, 0]$).

**Question 32 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

 

**Explication 32 :** $f(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1+x^2+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x+x^3+o\left(x^4\right)$. C est vrai et le reste est faux.

**Question 33 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 33 :** $f(0)=0$ et donc $f^{-1}(0)=0$. Ensuite, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc, $f^{-1}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $f^{-1}$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0. En tenant compte de $f^{-1}(0)=0$ et $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)}=1$, on peut poser

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x+ax^2+bx^3+cx^4+o\left(x^4\right).$$

Puisque $f^{-1}(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0 puis que $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,

$$\begin{aligned}
x = f\left(f^{-1}(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} f^{-1}(x)+\left(f^{-1}(x)\right)^3+o\left(\left(f^{-1}(x)\right)^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x+ax^2+bx^3+cx^4\right)+\left(x+ax^2\right)^3+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x+ax^2+bx^3+cx^4\right)+\left(x^3+3ax^4\right)+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+ax^2+(b+1)x^3+(c+3a)x^4+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, $a=b+1=c+3a=0$ puis $a=0$, $b=-1$ et $c=0$.

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^3+o\left(x^4\right).$$

D est vrai et le reste est faux.

# PARTIE VI

**Question 34 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 34 :** $X^4-6X^3+9X^2=X^2\left(X^2-6X+9\right)=X^2(X-3)^3$. De plus, les polynômes $X$ et $X-3$ sont irréductibles sur $\mathbb{C}$. Donc, A est vrai.
Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1 et donc $X^2-3X-3i$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$. Donc B est faux. Néanmoins,

$$X^4-6X^3+9X^2+9=X^2(X-3)^2-(3i)^2=(X(X-3)-3i)(X(X-3)+3i)=\left(X^2-3X-3i\right)\left(X^2-3X+3i\right).$$

Le discriminant du trinôme $X^2-3X-3i$ est $\Delta=(-3)^2-4(-3i)=9+12i=3(3+4i)=3(2+i)^2=\left(\sqrt{3}(2+i)\right)^2$. Les racines de ce trinôme sont $z_1=\dfrac{3+\sqrt{3}(2+i)}{2}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{3-\sqrt{3}(2+i)}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc,

$$X^2-3X-3i=\left(X-\frac{3}{2}-\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}+\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

et en conjuguant $X^2-3X+3i=\left(X-\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. En regroupant les facteurs conjugués, on obtient

 

$$
\begin{aligned}
X^4-6X^3+9X^2+9 &= \left(X-\frac{3}{2}-\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}-\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}+\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}+\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \left(X^2-\left(2\sqrt{3}+3\right)X+\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\left(X^2+\left(2\sqrt{3}-3\right)X+\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\\
&= \left(X^2-\left(2\sqrt{3}+3\right)X+3\sqrt{3}+6\right)\left(X^2+\left(2\sqrt{3}-3\right)X-3\sqrt{3}+6\right)
\end{aligned}
$$

Enfin, les deux trinômes du second degré sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ car sans racine réelle. D est vrai et C est faux.

**Question 35 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 35 :** L'énoncé est ambigu : si $n = 1$, $P'$ n'a pas de racine. On supposera $n \geqslant 2$. On note $x_1, \ldots, x_n$, les $n$ racines de $P$ où la numérotation a été effectuée de telle sorte que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. La fonction $x \mapsto P(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Puisque $P(x_1) = \ldots = P(x_n)\,(= 0)$, le théorème de Rolle permet d'affirmer que $P'$ s'annule une fois dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, en un certain réel $y_k$. Les $n-1$ réels $y_1, \ldots, y_{n-1}$, vérifient $x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ et sont donc deux à deux distincts. Puisque $P'$ est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de $P'$, toutes réelles et simples. Donc, A est vrai et le reste est faux. (On rappelle que « complexe » ne veut pas dire « non réel »).

**Question 36 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 36 :** Posons $Q = P^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout réel $x$, $Q(x) = (P(x))^2 + 1 \geqslant 1$ et en particulier $Q(x) \neq 0$. Ainsi, Q n'a pas de racines réelles et A et C sont faux. Puisque Q est de degré $2n$ et à coefficients réels, Q admet $2n$ racines complexes non réelles, deux à deux conjuguées.
$Q' = 2PP'$ admet $2n-1$ racines réelles et simples d'après la question précédente. Si Q admet une racine $z_0$ d'ordre au moins 2, $z_0$ est racine de $Q'$ et est donc réelle, ce qui est faux. Donc, Q n'admet pas de racine multiple et en conséquence admet $2n$ racines non réelles et simples. B est vrai et D est faux.

 