CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2024

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE I

Question 1 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 : $S_2 = -1^2 + 2^2 = 3$ et $\sum_{k=1}^{2} k^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Donc, A est faux. $u_1 = S_2 = 3$ et $\sum_{k=1}^{1}(2k)^2 - \sum_{k=1}^{1}(2k+1)^2 = 2^2 - 3^2 = -5$. Donc, B est faux. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 - (2n+1)^2 + (2n+2)^2 = u_n - (2n+1)^2 + (2n+2)^2.$$

Donc, D est faux. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p}(2p)^2 + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p-1}(2p-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left((2k)^2 - (2k-1)^2\right) > 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k k^2 = \sum_{p=1}^{n}(2p)^2 - \sum_{p=0}^{n}(2p+1)^2 = -1 + \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 \\ &= -1 - \sum_{k=1}^{n}\left((2k+1)^2 - (2k)^2\right) < 0. \end{aligned}$$

Donc, C est vrai.

Question 2 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 2 : $\sum_{k=0}^{1}\binom{2\times 1+1}{k} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = 4$ et $2^{2\times 1-1} = 2$. Donc, A est faux. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = 1 + \frac{n}{n+1} \geqslant 1.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \leqslant \binom{2n+1}{n+1}$. B est faux. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n.$$

Donc, D est vrai. Enfin, pour C, il n'y a rien à vérifier quand $n = 3$ puis pour $n \geqslant 4$ et $k \in [\![2, n-2]\!]$,

$$\begin{aligned}\binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} &= \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} + 2\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}((n-k)(n-k-1) + 2k(n-k) + k(k-1)) \\ &= \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}\left(n^2 - n\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

C est faux.

PARTIE II

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 3 : On note (E) l'équation proposée. Soit $z \in \mathbb{C}$ une éventuelle solution de (E). Donc, $z^2 - 4\overline{z} - 4 = 0$ puis en conjuguant $\overline{z}^2 - 4z - 4 = 0$. En retranchant membre à membre, on obtient $\left(z^2 - \overline{z}^2\right) + 4\left(z - \overline{z}\right) = 0$ puis nécessairement, $\left(z - \overline{z}\right)\left(z + \overline{z} + 4\right) = 0$. D est vrai.

Ainsi, si z est solution, nécessairement $\overline{z} = z$ et donc z est réel, ou bien $z + \overline{z} + 4 = 0$ puis $2\mathrm{Re}(z) + 4 = 0$ puis $\mathrm{Re}(z) = -2$.

Soit x un réel. x est solution de (E) si et seulement si $x^2 - 4x - 4 = 0$ ou encore $(x-2)^2 - 8 = 0$ ou encore $\left(x - 2 - 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2 + 2\sqrt{2}\right) = 0$. L'équation (E) admet les deux solutions réelles distinctes $z_1 = 2 - 2\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 + 2\sqrt{2}$. B est faux.

Soient x un réel puis $z = -2 + ix$. Alors, $z^2 - 4\overline{z} - 4 = (-2 + ix)^2 - 4(-2 - ix) - 4 = -x^2 + 8$ puis z est solution si et seulement si $x = \pm 2\sqrt{2}$ si et seulement si $z = -2 \pm 2i\sqrt{2}$. A et C sont faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}, -2 - 2i\sqrt{2}, -2 + 2i\sqrt{2}\right\}$. C est vrai et le reste est faux.

Question 5 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 5 : L'ensemble des racines du polynôme $X^{2n} - 1$ est

$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{2n}},\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\} = \left\{e^{\frac{ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\} = \left\{\omega_n^k,\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}.$$

A est faux. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n^n = \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1 \neq 1$. Donc, $\omega_n \notin \mathbb{U}_n$ puis B est faux. Mais, $\omega_n^n + 1 = 0$ et donc ω_n^1 est racine du polynôme $X^n + 1$. D est vrai.

Si $n = 2$, $P = \left(X - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - e^{i\pi}\right) = (X - i)(X + 1) = X^2 + (1 - i)X - i \notin \mathbb{R}[X]$. Donc, C est faux.

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 6 : Pour $n \geqslant 1$, $0 < \dfrac{\pi}{n} \leqslant \pi < 2\pi$ et donc $\omega_n \neq 1$ puis, en tenant compte de $\omega_n^n = e^{i\pi} = -1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_n^k = \omega_n \frac{1 - \omega_n^n}{1 - \omega_n} = \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n}.$$

puis A et B sont faux. Ensuite, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(1 - \omega_n^k\right)\left(1 - \overline{\omega_n}^k\right) = \left(1 - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = 1 - \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) + 1 = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

C est vrai. Enfin,

$$\prod_{k=1}^{n} \omega_n^k = \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^{1+2+\ldots+n} = e^{\frac{i\pi}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{n+1} = i^{n+1}$$

et donc D est faux.

Question 7 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 7 :

$$\begin{aligned}\frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} = \frac{2\overline{\omega_n}}{1 - \overline{\omega_n}} &\Leftrightarrow 2\omega_n - 2\omega_n\overline{\omega_n} = 2\overline{\omega_n} - 2\omega_n\overline{\omega_n} \Leftrightarrow \omega_n = \overline{\omega_n} \Leftrightarrow e^{\frac{i\pi}{n}} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{n} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 1.\end{aligned}$$

A est vrai. Ensuite,

$$\frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} + \frac{2\overline{\omega_n}}{1 - \overline{\omega_n}} = \frac{2\left(\omega_n + \overline{\omega_n}\right) - 4}{\left(1 - \omega_n\right)\left(1 - \overline{\omega_n}\right)} = \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 4}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}} + 1} = \frac{-4\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = -2.$$

B est faux. Ensuite,

$$\frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} \times \frac{2\overline{\omega_n}}{1 - \overline{\omega_n}} = \frac{4}{\left(1 - \omega_n\right)\left(1 - \overline{\omega_n}\right)} = \frac{4}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = \frac{2}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

C est faux. Enfin, $\dfrac{2\omega_n}{1 - \omega_n} = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \dfrac{ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ et donc D est vrai.

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : $S_2 = |1-i|^2 + |1+1|^2 = 6 > 4 = 2 \times 2$. Donc, A est faux. Ensuite,

$$\sum_{k=1}^{2} \left(1-\omega_2^k\right) \times \sum_{k=1}^{2} \left(1-\overline{\omega_2}^k\right) = (1-i+1+1)(1+i+1+1) = (3-i)(3+i) = 10 \neq S_2.$$

Donc, C est faux. $S_1 + \left|1-\omega_1^2\right|^2 = 4+4 = 8 \neq S_2$. Donc, D est faux. Enfin, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left|1-\omega_n^k\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(1-\omega_n^k\right)\left(1-\overline{\omega_n}^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(2-\omega_n^k-\overline{\omega_n}^k\right) \\ &= 2n - \frac{2\omega_n}{1-\omega_n} - \frac{2\overline{\omega_n}}{1-\overline{\omega_n}}.\end{aligned}$$

B est vrai.

PARTIE III

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 9 : Le décimal $0,1$ est solution de l'équation $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor$ et pas de l'équation $\lfloor 2x \rfloor = x$. A est faux. Ensuite, si pour $x \in \mathbb{R}$, $x = \lfloor 2x \rfloor$, alors $x \in \mathbb{Z}$ puis $2x = x$ puis $x = 0$ qui réciproquement convient. B et D sont faux et C est vrai.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 10 : Si $x > 2$, et $\lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x < x^2$ car $x^2 - 2x = x(x-2) > 0$. Dans ce cas, x n'est pas solution. Si $x < 0$, $\lfloor 2x \rfloor < 0 \leqslant x^2$ et x n'est pas solution. Donc, si x solution alors $x \in [0,2]$. B et D sont vrais. Mais alors x^2 est un entier, élément de $\{0;1;2;3;4\}$, ce qui implique $x \in \left\{0;1;\sqrt{2};\sqrt{3},2\right\}$ et donc A est faux. Enfin, $\lfloor 2 \times 1 \rfloor = 2 \neq 1^2$ puis $x^2 \neq 1$ si x est solution. Donc, C est faux.

Question 11 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : On sait que pour tout réel x, $2x-1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$ et donc, si x est solution, $2x-1 < x^n \leqslant 2x$. A est vrai. Si n est pair, si $x > 2$, $x^n \geqslant x^2 > 2x \geqslant \lfloor 2x \rfloor$ et si $x < 0$, $\lfloor 2x \rfloor < 0 \leqslant x^n$. Donc, $S_n \subset [0,2]$ puis C est faux. De même, D est faux car si (x_n) est une suite telle, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in S_n$, alors la suite (x_{2n}) est bornée puis la suite $(|x_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$.

On se place toujours dans le cas où n est pair.

Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $\lfloor 2x \rfloor = 0$ puis $x^n = \lfloor 2x \rfloor \Leftrightarrow x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, $\lfloor 2x \rfloor = 1$ puis $x^n = \lfloor 2x \rfloor \Leftrightarrow x^n = 1 \Leftrightarrow x = 1 \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

Si $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[$, $\lfloor 2x \rfloor = 2$ puis $x^n = \lfloor 2x \rfloor \Leftrightarrow x^n = 2 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{n}} \in \left[1, \sqrt{2}\right[\subset \left[1, \frac{3}{2}\right[$.

Si $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right[$, $\lfloor 2x \rfloor = 3$ puis $x^n = \lfloor 2x \rfloor \Leftrightarrow x^n = 3 \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{n}} \notin \left[\frac{3}{2}, 2\right[$ pour $n \geqslant 3$.

Si $x = 2$, $x^n = 2^n > 4 = \lfloor 2x \rfloor$ pour $n \geqslant 3$. Pour n pair tel que $n \geqslant 4$, $S_n = \left\{0, 2^{\frac{1}{n}}\right\}$. Donc, B est faux.

PARTIE IV

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0,\ xf'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ (xf)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x > 0,\ xf(x) = \lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x > 0,\ f(x) = \frac{\lambda}{x}.$$

$\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. A et B sont faux. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\lambda}{x}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. Donc, C est faux. Enfin, sur $]0, +\infty[$, une constante non nulle vérifie $xy'' + 2y' = 0$ et ne vérifie pas $xy' + y = 0$. Donc, D est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 13 : Une intégration par parties fournit

$$\int \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\ dx = x\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) - \int \frac{x/2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}\ dx = x\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C.$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 14 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 14 : Soit f une fonction dérivable sur $]0, 2[$.

$$\forall x \in]0,2[,\ xf'(x)+f(x)=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \forall x \in]0,2[,\ (xf)'(x)=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,2[,\ xf'(x)=x\,\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,2[,\ f'(x)=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\lambda}{x}$$

Ensuite, $\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+o\left(x^2\right)$ (la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$ est impaire) et $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{8}+o\left(x^3\right)$. Donc,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+o\left(x^2\right)+\frac{2}{x}\left(1-\frac{x^2}{8}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{\lambda}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{\lambda+2}{x}+\frac{x}{4}+o\left(x^2\right).$$

C est vrai et le reste est faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 15 : De même, les solutions sur $]-2,0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f une éventuelle solution sur $]-2,2[$. Nécessairement, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-2,2[,\ f(x)=\begin{cases} \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\lambda}{x} \text{ si } \lambda \in]0,2[\\ 0 \text{ si } x=0 \text{ (fourni par l'équation)} \\ \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\mu}{x} \text{ si } x \in]-2,0[\end{cases}.$$

Réciproquement, une telle fonction est solution de l'équation sur $]-2,2[$ si et seulement si cette fonction est dérivable en 0. Si $\lambda \neq -2$, d'après la question précédente, $|f(x)| \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{|\lambda+2|}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+}|f(x)|=+\infty$. Dans ce cas, f n'est pas dérivable en 0. Donc, nécessairement $\lambda=-2$. De même, $\mu=-2$ puis f est nécessairement la fonction f_0 définie par :

$$\forall x \in]-2,2[,\ f_0(x)=\begin{cases} \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-1\right) \text{ si } \lambda \in]-2,0[\cup]0,2[\\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases} = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}.$$

La fonction f_0 étant dérivable en 0, f_0 est solution de l'équation sur $]-2,2[$. A et B sont faux. C est faux car l'équation n'a pas de sens sur $\mathbb{R}$. Enfin, d'après la question précédente, $f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4}+o\left(x^2\right)$ puis $f_0'(0)=\frac{1}{4}$. D est vrai.

PARTIE V

Question 16 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 16 : Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n=\ln\left(1+u_n\right)$ de sorte que $u_n=e^{v_n}-1$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ln(1+0)=0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^0-1=0$.

Ainsi, si u_n ne tend pas vers 0, alors v_n ne tend pas vers 0 et dans ce cas, les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont grossièrement divergentes et en particulier de même nature.

Si u_n tend vers 0, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n > 0$ et encore une fois les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature. A est vrai.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(1-u_n) < 0$ et donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc, la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. B est faux.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$. u_n ne tend pas vers 0 et donc la série de terme général u_n diverge grossièrement. Mais,

$$u_n(1-u_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$$

puis la série de terme général $u_n(1-u_n)$ converge. Donc, C est faux. D est évidemment faux car pour $x > 0$, $\ln(1+x) < x$.

Question 17 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 17 : Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_{n+1}(a)}{p_n(a)} = 1 + a^{2^{n+1}} > 1$. La suite $(p_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante. Mais ceci n'impose pas $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(a) = +\infty$. A est faux.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \ln(p_{n+1}(a)) - \ln(p_n(a)) = \ln\left(\dfrac{p_{n+1}(a)}{p_n(a)}\right) = \ln\left(1 + a^{2^{n+1}}\right) > 0$. Puisque $a \in]0,1[$, $a^{2^{n+1}} = e^{-2^{n+1}\ln(a)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

$$\ln\left(1 + a^{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après un théorème de croissances comparées car $n^2 a^{2^{n+1}} = e^{2^{n+1}\ln(a)2\ln(n)}$.
Donc, la série de terme général $\ln(p_{n+1}(a)) - \ln(p_n(a))$ converge. On sait alors que la suite $(\ln(p_n(a)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel que l'on note $L(a)$. De plus, la suite $(p_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante,

$$L(a) \geqslant \ln(p_0(a)) = \ln(1+a) > 0.$$

Mais alors $p_n(a) = e^{\ln(p_n(a))} \underset{n\to+\infty}{\to} l(a) = e^{L(a)} > 1$. B est vrai.

Par un raisonnement analogue, la suite $(\ln(q_n(a)))$ converge vers un réel $M(a) < 0$ puis la suite $(q_n(a))$ converge vers un réel $m(a) = e^{M(a)} \in]0,1[$. C est faux et D est vrai.

Question 18 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 18 : $p_n(a) \times q_n(a) = \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right)\left(1 - a^{2^k}\right) = \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1 - \left(a^{2^k}\right)\right) = \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1 - a^{2^{k+1}}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1 - a^{2^k}\right) = \dfrac{q_{n+1}(a)}{1-a}$. A est faux. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n(a) = \dfrac{q_{n+1}(a)}{q_n(a)} \times \dfrac{1}{1-a}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(a) = m(a) > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(a) = \frac{m(a)}{m(a)} \times \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

B est faux. Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
q_n(a) &\underset{a\to 0}{=} (1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)\prod_{k=3}^{n}\left(1+o\left(a^5\right)\right) \underset{a\to 0}{=} (1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)\left(1+o\left(a^5\right)\right)\\
&\underset{a\to 0}{=} (1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)+o\left(a^5\right) \underset{a\to 0}{=} \left(1-a-a^2+a^3\right)\left(1-a^4\right)+o\left(a^5\right)\\
&\underset{a\to 0}{=} 1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+o\left(a^5\right).
\end{aligned}$$

C est vrai et D est faux.

PARTIE VI

Question 19 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 19 : $P(1) = 1-3+5-7+6-2 = 0$, $P'(1) = 5-12+15-14+6 = 0$ et $P''(1) = 20-36+30-14 = 0$. Donc, 1 est racine de P d'ordre au moins 3. $P^{(4)}(1) = 120-72 = 48 \neq 0$. Donc, 1 est racine de P d'ordre 3 exactement. A est vrai. Ensuite, $(X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1$ puis

$$P = \left(X^3-3X^2+3X-1\right)\left(X^2+2\right).$$

Le polynôme X^2+2 n'a pas de racine réelle et donc 1 est l'unique racine réelle de P. B est faux. Ensuite,

$$X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2 = \left(X^2-1\right)\left(X^3-3X^2+6X-10\right)+12X-12$$

avec $\deg(12X-12) < \deg\left(X^2-1\right)$. C est vrai et D est faux.

Question 20 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) VRAI

Explication 20 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La division euclidienne de P par $(X-1)^{n+1}$ s'écrit $P = Q\times(X-1)^{n+1}+R$ avec $(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\deg(R) \leqslant n$. Le nombre 1 est racine d'ordre $n+1$ du polynôme $Q\times(X-1)^{n+1}$ est donc racine au moins une fois des polynômes $\left(Q\times(X-1)^{n+1}\right)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Par suite,

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P^k(1) = \left(Q\times(X-1)^{n+1}\right)^{(k)}(1)+R^{(k)}(1) = R^{(k)}(1)$$

puis $\left(\forall k \in [\![0,n]\!],\ P^{(k)}(1) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in [\![0,n]\!],\ R^{(k)}(1) = 1\right)$. B est vrai.

D'après la formule de Taylor, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$ puis, la famille $\left((X-1)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant libre,

$$P \in E_n \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \frac{P^{(k)}(1)}{k!} = \frac{1}{k!} \Leftrightarrow P = P_0.$$

C est donc vrai. A et D sont donc nécessairement faux. A est faux car $P' \in E_{n-1} \not\Rightarrow P^{(0)}(1) = 1$.Mais malheureusement D est vrai. En effet, $0 = P_0 - P_0 \in F_n$ et si $(P,Q) \in (E_n)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ car

$$\lambda(P-P_0)+\mu(Q-P_0) = \lambda P+\mu Q-(\lambda+\mu-1)P_0-P_0$$

où de plus le polynôme $\lambda P+\mu Q-(\lambda+\mu-1)P_0$ est dans E_n car, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$(\lambda P+\mu Q-(\lambda+\mu-1)P_0)^{(k)}(1) = \lambda+\mu-(\lambda+\mu-1) = 1.$$

PARTIE VII

Question 21 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : Soit $u = (1, 1, 0) \in F \subset F \cup G$ et $v = (0, 1, 1) \in G \subset F \cup G$. $u + v = (1, 2, 1) \notin F$ car $1 - 2 - 1 \neq 0$ et $u + v \notin G$ car $1 + 2 - 1 \neq 0$. Donc, $u + v \notin F \cup G$. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc A est faux.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $(x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y = 0 \text{ (II} - \text{I)} \\ x - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \text{ (II} - \text{I)} \\ z = x \end{array}\right.$. Donc, $F \cap G = \{(x, 0, x),\ x \in \mathbb{R}\}$. $F \cap G$ est une droite vectorielle. Cette droite est engendrée par n'importe quel vecteur non nul de $F \cap G$ comme $(2, 0, 2)$ par exemple. B est vrai.

F et G sont des plans vectoriels. D'après la relation de Grassman, $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 2+2-1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) < +\infty$. Donc, $F + G = \mathbb{R}^3$. C est vrai.

$u = (1, 0, 1)$ est un vecteur non nul de F. Soit $D = \text{Vect}(u)$. Puisque $u \in G$, $D \cap G \neq \{0\}$ et donc D et G ne sont pas supplémentaires. D est faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 22 : En développant suivant la première colonne,

$$\begin{aligned}
\det(M_t) = \begin{vmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & t \\ t & 4 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \times (8 - 4t) - (4t - 8) + t\left(t^2 - 4\right) = -8(t - 2) + t(t - 2)(t + 2) \\
&= (t - 2)(t(t + 2) - 8) = (t - 2)\left(t^2 + 2t - 8\right) = (t - 2)(t + 4)(t - 2) = (t - 2)^2(t + 4).
\end{aligned}$$

Par suite, $\det(M_t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{2, -4\}$. A est faux. Si $t = 0$, $\det(M_t) \neq 0$ et donc $M_0 \in GL_3(\mathbb{R})$. C est vrai.

$\text{rg}(M_2) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 1$ car $C_1 \neq 0$, $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 2C_1$ (en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M_2). B est faux. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(M_2)) = 3 - \text{rg}(M_2) = 2$. Donc D est vrai.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : Le déterminant du système (S) est $\det(M_t)$. $\det(S) \neq 0 \Leftrightarrow t \notin \{2, -4\}$. Si $t \notin \{2, -4\}$, (S) est un système de Cramer et donc (S) admet un triplet solution et un seul.

Si $t = 2$, $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = a \\ x + 2y + 2z = b \\ x + 2y + 2z = \dfrac{c}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 2y + 2z = a$ et $a = b = \dfrac{c}{2}$. Si les égalités $a = b = \dfrac{c}{2}$ ne sont pas vérifiées (c'est le cas par exemple pour $(a, b, c) = (1, 0, 0)$), alors (S) n'a pas de solution. Donc, A est faux. Si les égalités sont vérifiées, (c'est le cas pour $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ par exemple), alors l'ensemble des solutions de (S) est le plan affine d'équation $x + 2y + 2z = a$. C est faux.

D est faux car l'ensemble des solutions de (S) n'est un espace vectoriel que quand $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ (sinon le triplet $(0, 0, 0)$ n'est pas solution de (S)) et pour $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ par exemple, l'ensemble des solutions n'est ni vide, ni un espace vectoriel.

Si $t = -4$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 4y + 2z = a \\ x + 2y - 4z = b \\ -4x + 4y + 4z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4y - 2z + a \\ (4y - 2z + a) + 2y - 4z = b \\ -4(4y - 2z + a) + 4y + 4z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4y - 2z + a \\ 6y - 6z = -a + b \\ -12y + 12z = 4a + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = y + \dfrac{a - b}{6} \\ x = 4y - 2\left(y + \dfrac{a - b}{6}\right) + a \\ 2(a - b) = 4a + c \end{array}\right.$$

(S) a des solutions $\Leftrightarrow 2(a - b) = 4a + c \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0$. B est vrai.

Question 24 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : $H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ puis $\dim(H_1 + H_2) \in \{d - 1, d\}$. Plus précisément,

$$\dim(H_1 + H_2) = d - 1 \Leftrightarrow H_1 + H_2 = H_1 \Leftrightarrow H_2 \subset H_1 \Leftrightarrow H_1 = H_2$$

(car H_1 et H_2 ont mêmes dimensions finies). Puisque H_1 et H_2 sont distincts, $\dim(H_1 + H_2) = d = \dim(E) < +\infty$ puis $H_1 + H_2 = E$ (et de même, $E = H_1 + H_3 = H_2 + H_3$). Mais alors,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 2(d - 1) - d = d - 2,$$

(et de même $\dim(H_1 \cap H_3) = \dim(H_2 \cap H_3) = d - 2$). En particulier , $\dim(H_1 \cap H_2) > 0$ puis $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. Donc, A est faux.

B et C sont équivalents car :

$$\begin{aligned} E = H_1 + (H_2 \cap H_3) &\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(H_1 + (H_2 \cap H_3)) \Leftrightarrow d = d - 1 + d - 2 - \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \\ &\Leftrightarrow \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = d - 3. \end{aligned}$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, si H_1 (rep. H_2, H_3) est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) alors H_1, H_2 et H_3 sont trois hyperplans deux à deux distincts et $H_1 \cap H_2 \cap H_3$, qui a pour système d'équations $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, est de dimension $d - 3$. Donc, D est faux.
Si $E = \mathbb{R}^n$, si H_1 (rep. H_2, H_3) est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$) alors H_1, H_2 et H_3 sont trois hyperplans deux à deux distincts et $H_1 \cap H_2 \cap H_3$, qui a pour système d'équations $x_1 = x_2 = 0$, est de dimension $d - 2$. Donc, B et C sont faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 25 : Soit $p = \frac{1}{2}f$. $p^2 = \left(\frac{1}{2}f\right) \circ \left(\frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{4}f^2 = \frac{1}{2}f = p$. Donc, D est vrai. On sait que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$. Mais alors, puisque $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(2p) = \text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(2p) = \text{Im}(p)$, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. B est vrai.

En prenant pour p une projection non nulle distincte de l'identité de E (ce qui est possible si $\dim(E) \geqslant 2$), $f^2 = 4p^2 = 4p = 2f$ mais $f = 2p \neq 2\mathrm{Id}_E$. Donc, A est faux. Ensuite, pour tout x de E, $f(f(x)) = 2f(x)$ ou encore, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $f(y) = 2y$. Comme $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, il existe $y \neq 0$ dans $\mathrm{Im}(f)$. Pour cet y, $f(y) = 2y \neq y$. C est faux.

Question 26 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 26 : $A = I_n + N$ fournit $A^2 = I_n + 2N + N^2$ (car I_n et N commutent). Donc, $\mathrm{Vect}\left(I_n, A, A^2\right) \subset \mathrm{Vect}\left(I_n, N, N^2\right)$. Mais on a aussi $N = A - I_n$ puis $N^2 = A^2 - 2A + I_n$ et donc $\mathrm{Vect}\left(I_n, N, N^2\right) \subset \mathrm{Vect}\left(I_n, A, A^2\right)$. Finalement, $\mathrm{Vect}\left(I_n, A, A^2\right) = \mathrm{Vect}\left(I_n, N, N^2\right)$.

Puisque I_n et N commutent, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le binôme de NEWTON fournit $A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i = I_n + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2$ car pour $i \geqslant 3$, $N^i = 0$. Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \in \mathrm{Vect}\left(I_n, N, N^2\right) = \mathrm{Vect}\left(I_n, A, A^2\right)$. A est vrai. Ensuite,

$$A^4 = (I_n + N)^4 = I_n + 4N + 6N^2 + 4N^3 + N^4 = I_n + 4N + 6N^2 \neq I_n + 4N + 8N^2 \text{ si } N^2 \neq 0.$$

Donc, C est faux. Ensuite, $A\left(I_n - N + N^2\right) = (I_n + N)\left(I_n - N + N^2\right) = I_n + N^3 = I_n$. Donc, A est inversible et

$$A^{-1} = I_n - N + N^2 = I_n - (A - I_n) + \left(A^2 - 2A + I_n\right) = A^2 - 3A + 3I_n.$$

Ensuite, $A^2 - 3A + 3I_n = A^2 + 3A + I_n \Leftrightarrow 6A = 2I_n \Leftrightarrow 3(I_n + N) = I_n \Leftrightarrow N = -\dfrac{2}{3} I_n$. $-\dfrac{2}{3} I_n$ n'est pas nilpotente et donc $A^2 - 3A + 3I_n \neq A^2 + 3A + I_n$ puis B est faux.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = X \Leftrightarrow (A - I_n)X = 0 \Leftrightarrow NX = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(N)$. $\mathrm{Ker}(N)$ est un sous-espace vectoriel différent $\{0\}$ (N étant nilpotente et en particulier non inversible) de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\mathrm{Ker}(N)$ est donc constitué d'une infinité de vecteurs puis D est faux.

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 27 : Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = PTP^{-1}$ puis $P(T - I_3)P^{-1} = PTP^{-1} - I_3 = A - I_3$.

$$(T - I_3)^2 = (-E_{1,2} + 2E_{1,3} + E_{2,3})(-E_{1,2} + 2E_{1,3} + E_{2,3}) = -E_{1,3}$$

puis $(T - I_3)^3 = -E_{1,3}(-E_{1,2} + 2E_{1,3} + E_{2,3}) = 0$. Ensuite, $(A - I_3)^2 = \left(P(T - I_3)P^{-1}\right)^2 = P(T - I_3)^2 P^{-1}$. $(T - I_3)^2 \neq 0$ (car P et P^{-1} sont inversibles) et donc $(A - I_3)^2 \neq 0$. A est faux.

Si $M = P(A - I_3)P^{-1} = P^2(T - I_3)P^{-2}$, alors $M^3 = \left(P^2(T - I_3)P^{-2}\right)^3 = P^2(T - I_3)^3 P^{-2} = 0$. C est vrai.

Posons $N = T - I_3$ de sorte que $T = I_3 + N$ avec $N^2 = -E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PT^kP^{-1}$ avec

$$T^k = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -k & 2k - \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k(5-k)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, D est faux. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le coefficient ligne 1, colonne 3 de A^k est nul si et seulement si $k = 5$. Donc, B est vrai.

Question 28 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : En développant suivant la première colonne,

$$\begin{aligned}D(a,b,c) &= \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} = a\left(bc^2 - ac^2\right) - a\left(b^2c - abc\right) = ac^2(b-a) - abc(b-a) \\ &= ac(b-a)(c-b).\end{aligned}$$

C et D sont faux. Ensuite, si $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq b$ (et donc $a \neq b$ et $c \neq b$), $D(a,b,c) = 0$. Donc, B est faux. Enfin, $D(c,b,a) = ca(b-c)(a-b) = ac(b-a)(c-b) = D(a,b,c)$. Donc, A est vrai.

PARTIE VIII

Question 29 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : $\|e_1 \pm e_2\|^2 = \|e_1\|^2 \pm 2\,(e_1|e_2) + \|e_2\|^2 = 2 \neq 1$. Donc, A est faux.
En prenant $u = e_1 = -v$, on a $\|u+v\|^2 = 0 < \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\|u\|^2 + \dfrac{1}{4}\|v\|^2$. Donc, B est faux. En prenant $u = v = e_1$, u et v ne sont pas orthogonaux mais $\|u+v\| = 2 = \|u\| + \|v\|$. Donc, C est faux.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille (e_1+u, e_2+u, e_3+u) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Alors, la base (e_1,e_2,e_3) étant orthonormée,

$$0 = (e_1+u|e_2+u) = (e_1,e_2) + (e_1,u) + (e_2,u) + \|u\|^2 = x + y + \|u\|^2 \text{ (I)}$$

et de même, $x + z + \|u\|^2 = 0$ (II) et $y + z + \|u\|^2 = 0$ (III). (I) + (II) + (III) fournit $x + y + z = -\dfrac{3}{2}\|u\|^2$ (IV) puis (IV) − (I), (IV) − (II) et (IV) − (III) fournissent $x = y = z = -\dfrac{1}{2}\|u\|^2$. Donc, $u = -\dfrac{1}{2}\|u\|^2(1,1,1)$. En prenant la norme des deux membres, on obtient $\|u\| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\|u\|^2$ et donc $\|u\| = 0$ ou $\|u\| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Si $\|u\| = 0$, alors $u = 0$ et la famille (e_1+u, e_2+u, e_3+u) est orthonormée.
Sinon, nécessairement $u = -\dfrac{2}{3}(1,1,1) = -\dfrac{2}{3}\,(e_1+e_2+e_3)$. Dans ce cas,

$$(e_1+u, e_2+u, e_3+u) = \left(\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3, -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3, -\frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3\right) = (v_1,v_2,v_3)\,.$$

$(v_1|v_2) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = 0 = (v_1|v_3) = (v_2|v_3)$ et $\|v_1\|^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = 1 = \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2$. Encore une fois, la famille (e_1+u, e_2+u, e_3+u) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Donc, D est vrai.

Question 30 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 : H est un plan vectoriel de vecteur normal $n = (2, -1, -1)$. On sait alors que $\text{Im}(p) = H = \{\text{vecteurs invariants par } p\} = n^{\perp}$ et $\text{Ker}(p) = \text{Vect}(n)$. Donc, C est faux. Ensuite, le vecteur $(1, 1, 1)$ est dans H et donc $p((1, 1, 1)) = (1, 1, 1)$ puis B est faux. $(0, 1, 1)$ n'est pas dans $H = \text{Im}(p)$ et donc D est faux.
Enfin, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p(p((x, y, z)) - (x, y, z)) = p^2((x, y, z)) - p((x, y, z)) = 0$. Donc, A est vrai.

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 31 : $(u_\alpha|e_1) = (\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_3|e_1) = \cos(\alpha)$ et $(u_\alpha|e_2) = 0$. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $(u_\alpha|e_1) = (u_\alpha|e_2) = 0$ puis $u_\alpha \in (e_1, e_2)^{\perp}$ et finalement $D_\alpha = F^{\perp}$. Dans ce cas, p_α est une projection orthogonale. A est faux.

Si $\alpha \in]0, \pi[$, $\sin(\alpha) \neq 0$ puis $e_3 = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}e_1 + \dfrac{1}{\sin(\alpha)}u_\alpha$ avec $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}e_1 \in F$ et $\dfrac{1}{\sin(\alpha)}u_\alpha \in D_\alpha$.

Donc, $p_\alpha(e_3) = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}e_1$. B est faux.

De manière générale, soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u_\alpha \in F \Leftrightarrow (a - \lambda\cos(\alpha))e_1 + be_2 + (c - \lambda\sin(\alpha))e_3 \in F \Leftrightarrow c - \lambda\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{\sin(\alpha)}.$$

Pour cette valeur de λ, on obtient $p_\alpha(x) = x - \lambda u_\alpha = \left(a - c\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) + be_2$. Dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient

$$p_{\frac{\pi}{4}}((a, b, c)) = (a - c)e_1 + be_2,$$

puis $\left(p_{\frac{\pi}{4}}(x)|x\right) = a(a - c) + b^2$. Ainsi, par exemple $\left(p_{\frac{\pi}{4}}(e_3)\,|e_3\right) = 0$ et e_3 n'est pas dans $\text{Ker}\,(p_\alpha) = \text{Vect}\left(u_{\frac{\pi}{4}}\right) = \text{Vect}\,(u_1 + u_3)$. C est faux.

Enfin, supposons $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. Pour $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\|p_\alpha(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \left(a - c\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow -2ac\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + c^2\left(1 - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } -2a\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + c\left(1 - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) = 0\end{aligned}$$

L'ensemble d'équation $c = 0$ est F. L'ensemble d'équation $-2a\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + c\left(1 - \dfrac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) = 0$ est un plan vectoriel, distinct de F car $\cos(\alpha) \neq 0$. D est vrai.

PARTIE IX

Question 32 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 32 : Pour calculer p_1, on peut supposer que les tirages sont simultanés, ce qui ne change pas la valeur de la probabilité. Mais alors, $p_1 = \dfrac{\binom{3}{3} \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}}$. Donc, C est vrai.

Pour calculer p_2, on note que le nombre X de boules rouges suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{3}{8}$ puis que $p_2 = P(X = 3) = \dbinom{5}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3\left(\dfrac{5}{8}\right)^2$. Donc,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} \times \frac{8^5}{\binom{5}{3}3^3 \times 5^2} = \frac{8^5}{\frac{8\times7\times6}{3\times2} \times 3^3 \times 5^2} = \frac{8^4}{7 \times 5^2 \times 3^3}.$$

A est faux. Enfin, dans le cas de tirages avec remise, on cherche la probabilité de l'événement $(\mathsf{NRNRN}) \cup (\mathsf{RNRNR})$. Cette probabilité est

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3^2 \times 5^3 + 3^3 \times 5^2}{8^5}.$$

Donc, D est faux.

Question 33 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 33 : Encore une fois les probabilités ne changent pas si on suppose les tirages simulyanés. Soit Y le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages sans remise. Le nombre de boules noires obtenues est donc $5 - Y$. On a $X = 2Y - (5 - Y) = 3Y - 5$. Puisque $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$, $X(\Omega) = \{-5, -2, 1, 4\}$. B est faux.

$P(X = -5) = P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}}$, $P(X = -2) = P(Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}}$, $P(X = 1) = P(Y = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}}$ et

$P(X = 4) = P(Y = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\binom{8}{5}}\left(-5 \times 1 - 2 \times \binom{3}{1}\binom{5}{4} + 1 \times \binom{3}{2}\binom{5}{3} + 4 \times \binom{3}{3}\binom{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\binom{8}{5}}(-5 - 30 + 30 + 40) = \frac{35}{\binom{8}{5}}. \end{aligned}$$

D'autre part, $6 \times \binom{5}{2} + 4 \times \binom{5}{3} + 2 \times \binom{5}{4} = 60 + \ldots > 35$. Donc, A et D sont faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : Si X est le nombre de Face obtenus en n lancers, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$ puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$P(A) = P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$. Donc, A est faux. D est faux car $\overline{A}$ est l'événement « on obtient au moins deux fois face ».

B est l'événement $\{1 \leqslant X \leqslant n - 1\}$. Donc, $P(B) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Ensuite, $A \cap B$ est l'événement « on obtient exactement une fois face et au moins une fois pile » c'est-à-dire l'événement $\{X = 1\}$ car $n \geqslant 2$. Donc, $P(A \cap B) = P(X = 1) = \frac{n}{2^n}$. B est faux.

$P(A) \times P(B) - P(A \cap B) = \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{2n-1}} = \frac{2^{n-1} - (n+1)}{2^{2n-1}}$. Cette expression est nulle pour $n = 3$ et donc, quand $n = 3$, les événements A et B sont indépendants. C est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 35 : L'énoncé donne $P(V) = 0,9$ et $P_H(V) = 0,5$. On en déduit encore que $P\left(\overline{V}\right) = 0,1$ et $P_H\left(\overline{V}\right) = 0,5$. En particulier, $P(V) \neq P_H(V)$ et donc V et H ne sont pas indépendants. A est faux.

On pose alors $p = P(H)$. On en déduit que

$$P_{\overline{H}}(V) = \frac{P\left(V \cap \overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)} = \frac{P(V) - P(V \cap H)}{1-p} = \frac{0,9 - P(H) \times P_H(V)}{1-p} = \frac{0,9 - 0,5p}{1-p},$$

et

$$P_{\overline{H}}\left(\overline{V}\right) = 1 - P_{\overline{H}}(V) = 1 - \frac{0,9-0,5p}{1-p} = \frac{0,1-0,5p}{1-p}$$

En C et D, on s'intéresse à $\dfrac{P_{\overline{V}}(H)}{P_V(H)}$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{\overline{V}}(H) = \frac{P(H) \times P_H\left(\overline{V}\right)}{P(H) \times P_H\left(\overline{V}\right) + P\left(\overline{H}\right) \times P_{\overline{H}}\left(\overline{V}\right)} = \frac{0,5p}{0,5p + (1-p)\dfrac{0,1-0,5p}{1-p}} = \frac{0,5p}{0,1} = 5p$$

et de même,

$$P_V(H) = \frac{P(H) \times P_H(V)}{P(H) \times P_H(V) + P\left(\overline{H}\right) \times P_{\overline{H}}(V)} = \frac{0,5p}{0,5p + (1-p)\dfrac{0,9-0,5p}{1-p}} = \frac{5p}{9}.$$

Donc, $\dfrac{P_{\overline{V}}(H)}{P_V(H)} = 9$. C est vrai et D est faux.

Question 36 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : 20 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (répondre à 20 questions). Chaque expérience a deux issues à savoir « répondre juste à la question » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{4}$ et « ne pas répondre juste à la question » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{3}{4}$. X étant le nombre de bonnes réponses ou encore le nombre de « succès », X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{4}$. Donc, A est faux.

Pour tout $k \in [\![0, 20]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{20}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20-k}$. En particulier, $P(X = 1) = 20 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{19}$. D est faux.

Soit $k \in [\![0, 19]\!]$.

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{\dbinom{20}{k+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{19-k}}{\dbinom{20}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20-k}} \\ &= \frac{20!}{(k+1)!(19-k)!} \times \frac{k!(20-k)!}{20!} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{20-k}{k+1}\end{aligned}$$

puis

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{20-k}{k+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 20-k \geqslant 3(k+1) \Leftrightarrow 4k \leqslant 17$$
$$\Leftrightarrow k \leqslant \frac{17}{4} \Leftrightarrow k \leqslant 4,25.$$

Donc, B est vrai. On en déduit que $P(X=5) \geqslant P(X=4) \geqslant \ldots \geqslant P(X=0)$ et aussi que $P(X=5) > P(X=6) > \ldots > P(X=20)$. Plus précisément, $\dfrac{P(X=5)}{P(X=4)} = \dfrac{20-4}{3(4+1)} = \dfrac{16}{15} > 1$ et donc la note la plus probable est 5. D'autre part, $E(X-1) = E(X) - 1 = np - 1 = \dfrac{20}{4} - 1 = 4$. Donc, C est faux.

