



**RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE**

*Liberté
Égalité
Fraternité*



ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Durée : 2 Heures
Coefficient : 1**

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 page de consignes (recto-verso),
- 1 page d'avertissement (recto), page 1
- 9 pages de texte (recto-verso) numérotée de 2 à 10

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée : bleue ou noire. Vous devez **cocher** lisiblement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 3) Si vous voulez **modifier** votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la 2^{ème} ligne.
- 4) Si vous voulez **annuler** votre réponse, vous devez cocher la case « Ann ». Dans ce cas-là, aucune réponse ne sera prise en compte.
- 5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.

Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).

Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse, *vous devez cocher l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes, *vous devez cocher deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne, *vous devez alors cocher la case E.*

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

Tournez la page S.V.P.

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :

- A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :

- A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :

- A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquez sur la feuille réponse :

1 -

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 -

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3 -

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Toutes les questions sont indépendantes les unes des autres

\wedge et \vee désignent respectivement les connecteurs positionnels « et » et « ou » et $\exists!$ signifie : « il existe un ou une unique... ». Pour une proposition $A(x)$ dépendant d'une variable x on note $\neg A(x)$ sa négation.

Question 1 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

- A) La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$.
- B) La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \vee (\exists x \in E, \neg A(x))$.
- C) La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N$ est $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$.
- D) La négation de $\exists! x \in \mathbb{R}, x = x^2$ est $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2$.

Question 2 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

- A) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
- B) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
- C) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
- D) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

Question 3 : Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et les assertions P, Q, R suivantes :

$P: (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0), \quad Q: (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0), \quad R: (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$

Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

- A) $\neg R \Rightarrow Q$
- B) $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- C) $\neg P \Rightarrow \neg R$
- D) $Q \Rightarrow R$

Question 4 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

- A) Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
- B) Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
- C) Un prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
- D) Un prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

Question 5 : soient f et g deux applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par :

$f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, $g(n) = 0$ sinon.

- A) f est bijective.
- B) g est bijective.
- C) $f \circ g$ est bijective.
- D) $g \circ f$ est bijective.

Question 6 : la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$ est dérivable sur :

- A) $[1; +\infty[$
- B) $]1; +\infty[$
- C) $]1; 2[\cup]2; +\infty[$
- D) $[2; +\infty[$

Question 7 : a et b étant deux réels, l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$ est :

- A) Un singleton si $a = 1$ et $b = 1$
- B) Infini si $a \neq 1$ et $b = 0$
- C) Infini si $a = -2$ et $b = -2$
- D) Vide si $a \neq -2$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$

Question 8 : soit $D = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \sin(\theta) \neq 0\}$: pour $\theta \in D$ on note $\cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Pour tout $\theta \in D$, l'ensemble S des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$ est

- A) $S = \left\{ \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) i \right\}$
- B) $S = \left\{ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) i \right\}$
- C) $S = \left\{ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\}$
- D) $S = \left\{ \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\}$

Question 9 : après calculs, nous trouvons :

- A) $\sin(5\theta) = 32 \sin^5(\theta) - 20 \sin^3(\theta) + 5 \sin(\theta)$
- B) $\sin(5\theta) = 16 \sin^5(\theta) - 20 \sin^3(\theta) + 3 \sin(\theta)$
- C) $\sin(5\theta) = 16 \sin^5(\theta) - 10 \sin^3(\theta) + 5 \sin(\theta)$
- D) $\sin(5\theta) = 16 \sin^5(\theta) - 20 \sin^3(\theta) + 5 \sin(\theta)$

Question 10 : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$ est

- A) $S = \left\{ x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- B) l'ensemble vide
- C) $S = \left\{ x \mapsto x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \right\}$
- D) $S = \left\{ x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Question 11 : l'égalité suivante est vraie :

A) $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$

B) $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln(2) - 2$

C) $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$

D) $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Question 12 : dans \mathbb{R} l'équation $3^x + 4^x = 5^x$ admet :

- A) Exactement trois solutions
- B) Exactement deux solutions
- C) Une unique solution.
- D) Aucune solution.

Question 13 : en utilisant la dérivée première puis la dérivée seconde de f définie par $f(x) = (1+x)^n$ nous obtenons

A) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n(n+1) \times 2^{n-2}$

B) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$

C) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^n$

D) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \times 2^{n-2}$

Question 14 :

nous rappelons que $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'égalité suivante est vraie :

A) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(3n+5)}{6}$

B) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n(n+1)(7n+5)}{6}$

C) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

D) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n(n+1)(7n+5)}{3}$

Question 15 : dans \mathbb{R} , l'équation $\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1$ admet :

- A) Aucune solution
- B) Une unique solution
- C) Exactement deux solutions
- D) Exactement trois solutions

Question 16 : l'ensemble S des solutions dans \mathbb{N}^2 du système $\begin{cases} PGCD(x, y) = 5 \\ PPCM(x, y) = 60 \end{cases}$ est composé de :

- A) 6 couples solutions
- B) 4 couples solutions
- C) 2 couples solutions
- D) 1 couple solution

Question 17 : nous définissons les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, & a_0 = 1 \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n, & b_0 = 2 \\ c_{n+1} = 3c_n, & c_0 = 7 \end{cases}$$

Après calculs de la puissance d'une certaine matrice nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A) \begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$$

$$B) \begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^n \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$$

$$C) \begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7n \times 3^{n-1} \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$$

Question 18 :

$\forall m \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $rg(M)$ le rang de M .

- A) Il existe un seul nombre réel m pour lequel $rg(M) = 2$
- B) Il existe exactement trois nombres réels m pour lequel $rg(M) = 2$.
- C) Pour tous les nombres réels m , $rg(M) = 3$.
- D) Pour tous les nombres réels m privés d'un seul nombre, $rg(M) = 3$.

Question 19 :

la famille formée des vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 est libre :

- A) $x_1 = (1; 0; 1)$ et $x_2 = (1; 2; 2)$
- B) $x_1 = (1; 0; 0)$, $x_2 = (1; 1; 0)$ et $x_3 = (1; 1; 1)$
- C) $x_1 = (1; 2; 1)$, $x_2 = (2; 1; -1)$ et $x_3 = (1; -1; -2)$
- D) $x_1 = (1; -1; 1)$, $x_2 = (2; -1; 3)$ et $x_3 = (-1; 1; -1)$

Question 28 : après avoir trouvé a, b, c, d tels que $\frac{1}{x^2(1+x)^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$ et sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, nous trouvons :

A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$

B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$

C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi}{3} - 3$

D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \pi^2 - 3$

Question 29 : en 0, l'égalité est vraie :

A) $\ln(2 + \sin(x)) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$

B) $\ln(2 + \sin(x)) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$

C) $\ln(2 + \sin(x)) = 2 \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$

D) $\ln(2 + \sin(x)) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$

Question 30 : soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.

A) $PGCD(a, b) = PGCD(b, 3)$

B) $PGCD(a, b) = PGCD(b, 2)$

C) Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 1$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 2$

D) Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 2$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 1$

Question 31 : nous définissons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexe par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$ où $\overline{u_n}$

désigne le conjugué de u_n . Pour z un complexe, $\Im m(z)$ désigne sa partie imaginaire et $\Re e(z)$ sa partie réelle.

A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \Re e(u_0)$

B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = i \Im m(u_0)$

C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

D) (u_n) n'admet pas de limite en $+\infty$.

Question 32 : sélectionner la ou les affirmation(s) vraie(s) :

- A) La somme de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 est égale à : 10100.
- B) La somme de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 est égale à : 5150.
- C) La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 100 est égale à : 5050.
- D) La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 100 est égale à : 10000.

Question 33 : sélectionner la ou les affirmation(s) vraie(s) :

- A) Pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
- B) Pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
- C) Nous en déduisons que pour $n = 10000$ la partie entière de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est 99
- D) Nous en déduisons que pour $n = 10000$ la partie entière de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ est 99

Question 34 : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ soient les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}$ de courbes C_λ

- A) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x=1$ sont concourantes.
- B) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x=1$ sont parallèles.
- C) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x=1$ sont confondues.
- D) Il n'est pas possible de savoir si toutes les tangentes aux C_λ aux points d'abscisses $x=1$ sont concourantes, parallèles ou confondues.

Question 35 : soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = \frac{z-2}{z+i}$ pour $z \neq i$

- A) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est un cercle.
- B) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est une droite.
- C) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur est un cercle.
- D) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur est une droite

Question 36 : après avoir d'une part étudié la fonction $x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$ et d'autre part simplifié

l'expression de $\cos(\arcsin(y))$, nous démontrons que l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$:

- A) n'admet pas de solution.
- B) admet une infinité de solutions.
- C) admet une unique solution : $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- D) admet une unique solution : $\frac{1}{\sqrt{5}}$.