CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES PILOTE DE LIGNE
ANNEE 2023
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE I

Question 1 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 1 : La négation de $(\exists x \in E,\ A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ A(x))$ est $(\exists x \in E,\ A(x)) \wedge \neg(\forall x \in E,\ A(x))$ ou encore $(\exists x \in E,\ A(x)) \wedge (\exists x \in E,\ \neg A(x))$. A est vrai et B est faux.

La négation de $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N$ est $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. C est faux.

Pour D), la négation est : (il n'existe pas $x \in \mathbb{R}/\ x = x^2$) ou (il existe au moins deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $x_1 = x_1^2$ et $x_2 = x_2^2$). Plus précisément, la négation demandée est $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x = x^2\right) \vee \left(\exists\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 \neq x_2) \wedge \left(x_1 = x_1^2\right) \wedge \left(x_2 = x_2^2\right)\right)$. D est faux.

Question 2 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 2 : Si $x = 0$ et $y = 0$, $x + y^2 \neq 1$. Donc A est faux. Si $x = 2$, $x + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = -1$. Cette dernière équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc, B est faux.
Pour x réel donné, la phrase « $\forall y \in \mathbb{R}$, $y^2 = 1 - x$ » est fausse. Donc, C est faux.
Enfin, si $x = 1$ et $y = 0$, alors $x + y^2 = 1$. Donc D est vrai.

Question 3 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 3 : $\neg R$ est : $(\exists x_1 \in \mathbb{R}/\ f(x_1) \leqslant 0) \wedge (\exists x_2 \in \mathbb{R}/\ f(x_2) \geqslant 0)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, ceci entraine la proposition Q d'après le théorème des valeurs intermédiaires. A est vrai.

$\neg Q$ est la proposition « f ne s'annule pas » et $\neg P$ est la proposition « f n'est pas la fonction nulle ». L'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie puis B est vrai.

La fonction $f\ :\ x \mapsto e^x$ vérifie $\neg P$ et ne vérifie pas $\neg R$. Donc, C est faux. La fonction nulle vérifie Q et ne vérifie pas R. Donc, D est faux.

Question 4 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 4 : Soient $f : E \to F$ une application puis E' une partie de E. Si f est injective, alors $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$. En particulier, $\forall (x_1, x_2) \in E'^2$, $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ et donc $f_{/E'}$ est injective. A est vrai.

Soient $f : E \to F$ une application puis E' un ensemble contenant E puis $g : E' \to F$ telle que $g_{/E'} = f$. Si f est surjective, alors $\forall y \in F$, $\exists x \in E/ \ f(x) = y$. En particulier, $\forall y \in F$, $\exists x \in E'/ \ g(x) = y$ et donc g est surjective. D est vrai.

Donc, B et C sont nécessairement faux. Pour B, en retirant des éléments à E, on cout le risque de retirer les antécédents d'un élément de F et pour C, en ajoutant des éléments à E, on court le risque de créer un nouvel élément non dans E ayant même image qu'un élément de E préexistant.

Question 5 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et donc A est vrai. Ensuite, $g \circ f = f \circ g = g$. De plus $g(1) = g(3) = 0$ avec $1 \neq 3$ et donc, g n'est pas injective. B, C et D sont faux.

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 6 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $f(x)$ existe, il est nécessaire que $x \geqslant 1$. Soit donc $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} \leqslant x \\ &\Leftrightarrow 4(x-1) \leqslant x^2 \text{ (car } x \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vérifiée par tout réel de $[1, +\infty[$. Donc, l'ensemble de définition de f est $[1, +\infty[$. Ensuite, on est sûr que f est dérivable en tout réel x de $[1, +\infty[$ tel que $\frac{2\sqrt{x-1}}{x} < 1$ ce qui équivaut à $(x-2)^2 > 0$ ou encore $x \in [1, 2[\cup]2, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[1, 2[\cup]2, +\infty[$ au moins.

Etudions la dérivabilité en 2. Pour $x \in [1, +\infty[$,

$$f(x) - f(2) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right) - \text{Arcsin}(1) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arccos}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right).$$

Ensuite, $-\text{Arccos}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right) \underset{x \to 2}{\to} -\text{Arccos}(1) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} -\text{Arccos}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right) &\underset{x \to 2}{\sim} -\sin\left(\text{Arccos}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)^2} = -\sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2}} \\ &\underset{x \to 2}{\sim} -\sqrt{\frac{(x-2)^2}{2^2}} = -\frac{1}{2}|x-2| \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \underset{x \to 2}{\sim} -\sqrt{\frac{(x-2)^2}{2^2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} -1/2 \text{ si } x > 2 \\ 1/2 \text{ si } x < 2 \end{cases}$. Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_g(2) = \frac{1}{2}$ et $f'_d(2) = -\frac{1}{2}$. Puisque $f'_g(2) \neq f'_d(2)$, f n'est pas dérivable en 2 et finalement, f est dérivable sur $[1, 2[\cup]2, +\infty[$ et pas plus. En particulier, f est dérivable sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$. C est vrai et le reste est faux.

Question 7 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 7 : Le déterminant Δ du système (S) est (en développant suivant la première colonne) :

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a\left(a^2b-b\right)-(ab-b)+(b-ab) = ab\left(a^2-1\right)-2b(a-1)$$
$$= b(a-1)(a(a+1)-2)) = b(a-1)\left(a^2+a-2\right) = b(a-1)^2(a+2).$$

Si $a \notin \{-2, 1\}$ et $b \neq 0$, $\Delta \neq 0$ puis le système proposé admet un triplet solution et un seul. D est faux.

Si $a = b = 1$, le système équivaut à l'unique équation $x + y + z = 1$ et admet une infinité de triplets solutions. A est faux.

Si $a \neq 1$ et $b = 0$, $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax+z=1 \\ x+z=0 \\ x+az=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x \\ (a-1)x=1 \\ -(a-1)x=1 \end{array}\right.$. Ce système n'a pas de solution. B est faux.

Si $a = -2$ et $b = -2$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-2y+z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2x+2y+1 \\ x+4y+(2x+2y+1)=-2 \\ x-2y-2(2x+2y+1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2x+2y+1 \\ 3x+6y=-3 \\ -3x-6y=3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2x+2y+1 \\ x+2y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y-1 \\ z=-2y-1 \end{array}\right..$$

Ce système admet une infinité de triplets solutions. C est vrai.

Question 8 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 8 : Soit $\theta \in D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (donc $e^{i\theta} \neq \pm 1$). Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow i-z = e^{i\theta}(i+z) \text{ (car } -i \text{ n'est pas solution)}$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{i\theta}+1\right)z = -i\left(e^{i\theta}-1\right) \Leftrightarrow z = -\frac{i\left(e^{i\theta}-1\right)}{e^{i\theta}+1} \Leftrightarrow z = -\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \times \frac{i\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{i \times 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

C est vrai et le reste est faux.

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 9 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}\left(e^{5i\theta}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\cos^5(\theta)+5i\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)-10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)+i\sin^5(\theta)\right)\\ &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta) = 5\left(1-\sin^2(\theta)\right)^2\sin(\theta)-10\left(1-\sin^2(\theta)\right)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\ &= 16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)\end{aligned}$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 10 : Les fonctions proposées en A, C et D ne sont pas dérivables en 0. Donc, A, C et D sont faux.

Sur $]0,+\infty[$, $2x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 3x^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} = 0$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}}$.

Sur $]0,+\infty[$, $2x\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 3x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{x}$ puis une solution particulière de l'équation sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

Les solutions de l'équation sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

Soit f une éventuelle solution sur $[0,+\infty[$. La restriction de f à $]0,+\infty[$ est de la forme précédente puis f est de la forme précédente sur $[0,+\infty[$ par continuité en 0. Mais une telle fonction n'est pas dérivable en 0 et donc l'équation n'admet pas de solution sur $[0,+\infty[$. B est vrai.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 11 : Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx &= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx\\ &= \ln(2) - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \ln(2)-2+2\left[\mathrm{Arctan}(x)\right]_0^1 = \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

A et B sont faux.

Ensuite, en posant $t = e^x$ et donc $dt = e^x\,dx$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,e^x dx\\ &= \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int_1^2 \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int_1^2\left((t+1)^{\frac{1}{2}} - (t+1)^{-\frac{1}{2}}\right)dt\\ &= \left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left(\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

C est faux et D est vrai.

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 : Pour $x \in \mathbb{R}$, $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = 1$. La fonction $f\ :\ x \mapsto \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$. Donc, l'équation admet au plus une solution. A et B sont faux.

$f(0) = 2 > 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 < 1$. Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, l'équation admet au moins une solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement, l'équation admet exactement une solution. C est vrai et D est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 13 : Pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ puis, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$. Quand $x = 1$, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. A et C sont faux.

Pour $n \geqslant 2$, en redérivant, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ puis, en évaluant en 1, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$, ce qui reste vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$. Mais alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - k\right)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}((n-1)+2) = n(n+1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

B est faux et D est vrai.

Question 14 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 14 :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j^2 = 2\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 2n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)}{6}(2(2n+1) + 3(n+1)) = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}\end{aligned}$$

C est vrai et le reste est faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 15 : Sur $]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1\Leftrightarrow 2x+1=x(x+1)\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ ou }x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \left(\text{car }\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0\right).$$

Sur $]-1,0[$,

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}=1\Leftrightarrow -\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1\Leftrightarrow x^2+x+1=0.$$

Cette dernière équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\Delta=-3<0$. Sur $]-\infty,-1[$,

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}=1\Leftrightarrow -\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=1\Leftrightarrow -(2x+1)=x(x+1)\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\text{ ou }x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ \left(\text{car }\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\geqslant -1\right).$$

L'équation proposée a exactement deux solutions. C est vrai et le reste est faux.

Question 16 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 16 : Soit $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\text{PGCD}(x,y)=5$. On pose $x=5x'$ et $y=5y'$ où $x'\wedge y'=1$.

$$\text{PPCM}(x,y)=60\Leftrightarrow 5\ \text{PPCM}(x',y')=60\Leftrightarrow x'y'=12.$$

Les décompositions de 12 en produit de deux entiers strictement positifs et premiers entre eux sont 1×12, 3×4, 4×3, 12×1. Les solutions du problème sont alors $(5,60)$, $(15,20)$, $(20,15)$, $(60,5)$. Il y a exactement quatre couples solutions. B est vrai et le reste est faux.

Question 17 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 17 : On pose $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{l}a_{n+1}=3a_n+b_n\\b_{n+1}=3b_n+c_n\\c_{n+1}=3c_n\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=AX_n\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=A^nX_0.$$

$A = 3I_3 + N$ où $N = E_{1,2} + E_{2,3}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$ puis $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$. Puisque les matrices $3I_3$ et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour $n \geqslant 2$,

$$A^n = (3I_3 + N)^n = 3^n I_3 + n3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}N^2$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$ ou $n = 1$. Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ puis

$$X_n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + 2 \times n3^{n-1} + 7 \times \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 2 \times 3^n + 7 \times n3^{n-1} \\ 7 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

A est vrai et le reste est faux.

Question 18 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : $\det(M) = 1 \times (2m-2) - (4-1) + m(4-m) = -m^2 + 6m - 5 = -(m-1)(m-5)$. Si $m \notin \{1,5\}$, $M \in GL_3(\mathbb{R})$ ou encore $\mathrm{rg}(M) = 3$ et si $m \in \{1,5\}$, $\mathrm{rg}(M) < 3$. B, C et D sont faux.

Le mineur formé des deux premières lignes et deux dernières colonnes est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4 - m$. Si $m \in \{1,5\}$, ce mineur de format 2 est non nul et donc $\mathrm{rg}(M) \geqslant 2$ puis $\mathrm{rg}(M) = 2$.

En résumé, si $m \notin \{1,5\}$, $\mathrm{rg}(M) = 3$ et si $m \in \{1,5\}$, $\mathrm{rg}(M) = 2$. Tout est faux.

Question 19 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : x_1 est x_2 ne sont pas colinéaires. Donc, la famille (x_1, x_2) est libre. A est vrai.
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$. Donc, (x_1, x_2, x_3) est libre. B est vrai.
C et D sont donc nécessairement faux. De fait, dans C, $x_3 = x_2 - x_1$ et dans D, $x_3 = -x_1$.

Question 20 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 20 : F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^4$. F est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ puis $\dim(F) = 3$. Un supplémentaire de F est une droite (donc D est faux) $D = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u \notin F$. Donc, A est faux et B et C sont vrais.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : Puisque p est une projection, on sait que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$. Si de plus, $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)$, alors $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p) = \{0\}$. Par suite, $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = \{0\}$ ce qui est exclu. Donc, il n'existe pas de projecteur p tel que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)$. A est faux.

$2p$ projecteur $\Leftrightarrow (2p)^2 = 2p \Leftrightarrow 4p^2 = 2p \Leftrightarrow 2p = p \Leftrightarrow p = 0$. Il n'existe pas de projecteur non nul p tel que $2p$ est un projecteur. B est faux.

On sait que la noyau de $q = Id_E - p$ est l'image de p (et l'image de $q = Id_E - p$ est le noyau de p). C est vrai.

$(2Id_E - p)^2 = 2Id_E - p \Leftrightarrow 4Id_E - 4p + p^2 = 2Id_E - p \Leftrightarrow 2Id_E - 2p = 0 \Leftrightarrow p = Id_E$ ce qui est exclu. D est faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 22 : Posons $v = (1, 2, 3)$. Soit $u = (x, y, z)$. Déterminons le projeté de u sur H parallèlement à L. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u - \lambda v \in H \Leftrightarrow (x - \lambda) + (y - 2\lambda) + (z - 3\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x + y + z}{6}.$$

Le projeté $p(u)$ de u sur H parallèlement à L est

$$p(u) = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{6}(1, 2, 3) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} s(u) = 2p(u) - u &= \frac{1}{3}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{3}(2x - y - z, -2x + y - 2z, -3x - 3y). \end{aligned}$$

Tout est faux.

Remarque. Si on sait que $\text{Tr}(s) = \dim(H) - \dim(L)$, on voit immédiatement que tout est faux. Par exemple, en A, $\text{Tr}(s) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \neq 1$.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= m \begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 0 & 0 \\ -1-m & 2 & -m-1 & 0 \\ 2m & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \ (L_1 \leftarrow L_1 + L_4,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4)$$

$$= -m \begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 0 \\ -1-m & 2 & -m-1 \\ 2m & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ (en développant suivant la dernière colonne)}$$

$$= -2m \begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 0 \\ -1-m & 2 & -m-1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2m \left(\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ -1-m & 2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 2 & -m-1 \end{vmatrix} \right) \text{ (développement suivant la dernière ligne)}$$

$$= -2m(2(m+1) + (m+1)(m-1) - m(m-1)(m+1)) = -2m(m+1)\left(2 + m - 1 - m^2 + m\right)$$

$$= 2m(m+1)\left(m^2 - 2m - 1\right) = 2m(m+1)\left(m - \left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(m - \left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

Donc, M est inversible si et seulement si $m \notin \left\{0, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$. B est vrai et le reste est faux.

Question 24 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : Le nombre de cas possibles, tous équiprobables, est encore le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$, à savoir $n!$. Un cas favorable est une permutation qui fixe i. Une telle permutation s'identifie à une permutation de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Il y en a $(n-1)!$. La probabilité qu'il y ait rencontre au i-ème tirage est $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. A est vrai et B est faux.

C et D sont clairement faux quand $n = 1$, le nombre moyen de rencontres étant 1, ou $n = 2$.

Question 25 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 25 : $P(D) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

- Pour A), $D \subset A$ puis $A \cap D = D$ puis $P(A \cap D) = P(D) \neq P(A) \times P(D)$ car $P(A) \neq 1$. A est faux.
- De même, pour B), $D \subset A$ puis $A \cap D = D$ puis $P(A \cap D) = P(D) \neq P(A) \times P(D)$ car $P(A) \neq 1$. B est faux.
- Pour C), $A \subset D$ puis $A \cap D = A$ puis $P(A \cap D) = P(A) \neq P(A) \times P(D)$ car $P(D) \neq 1$. C est faux.
- Pour D), $P(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, $P(D) = \dfrac{1}{13}$. Mais alors, $P(A \cap D) = \dfrac{1}{52} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{13} = P(A) \times P(D)$. D est vrai.

Question 26 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 26 : $F = u^{\perp}$ est le plan d'équation $4x - y + 2z = 0$. A est faux. Notons p_u la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ et p_F la projection orthogonale sur F. On sait que $p_u(w) = \dfrac{(u|w)}{\|u\|^2}u$ puis que

$$d(w, F) = \|w - p_F(w)\| = \|p_u(w)\| = \left\|\frac{2}{\|u\|^2}u\right\| = \frac{2}{\|u\|^2}\|u\| = \frac{2}{\|u\|} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

C est vrai et B et D sont faux.

Question 27 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 27 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $e^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1$ car $0 < \dfrac{\pi}{n} < 2\pi$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}}} \times \frac{-2}{e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{-\frac{i\pi}{2n}}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-2e^{\frac{i\pi}{2n}}}{2i\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)},\end{aligned}$$

puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi/2n} = \frac{2n}{\pi}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = +\infty$. D est vrai et le reste est faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : $F = \dfrac{1}{X^2(1+X)^2} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X} + \dfrac{d}{X^2}$.

- $b = \displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)^2F(x) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$.
- $d = \displaystyle\lim_{x\to 0} x^2F(x) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$.
- $a + c = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et donc $c = -a$.
- En évaluant en 1, on obtient alors $\dfrac{1}{4} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4} - a + 1$ puis $a = 2$. Donc,

$$\frac{1}{X^2(1+X)^2} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2}.$$

Ensuite, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)^2} &= 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 2\left(\frac{1}{N+1} - 1\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^2} - 1.\end{aligned}$$

Quand N tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers $-2 + 2 \times \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3$. B est vrai et le reste est faux.

Question 29 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 29 :

$$\begin{aligned}\ln(2+\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 + x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

A est vrai et le reste est faux.

Question 30 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 30 : $a - 2nb = n^2 + 5 = b + 4$. Ensuite, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - 2nb, b) = \text{PGCD}(b + 4, b)$ puis $\text{PGCD}(b + 4, b) = \text{PGCD}((b + 4) - 4, b) = \text{PGCD}(b, 4)$.

Si n est pair, b est impair et donc premier à 4. Dans ce cas, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, 4) = 1$. Si n est impair, on pose $n = 2k + 1$ de sorte que $b = 4k^2 + 4k + 2$. Dans ce cas, les diviseurs communs à b et 4 sont les diviseurs communs à 4 et $b - 4k(k + 1) = 2$ et donc $\text{PGCD}(b, 4) = 2$.

En résumé, si n est pair, $\text{PGCD}(a, b) = 1$ et si n est impair, $\text{PGCD}(a, b) = 2$. C est vrai et D est faux.

Ensuite, si $n = 5$, $\text{PGCD}(b, 3) = \text{PGCD}(26, 3) = 1$ et $\text{PGCD}(a, b) = 2 \neq 1$. Donc, A est faux. Mais si n est pair, b est impair et donc $\text{PGCD}(b, 2) = 1 = \text{PGCD}(a, b)$ et si n est impair, b est pair puis $\text{PGCD}(b, 2) = 2 = \text{PGCD}(a, b)$. Donc, B est vrai.

Question 31 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 31 : Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = x_n + iy_n$ où $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3\left(x_n + iy_n\right) - 2\left(x_n - iy_n\right)\right) = \frac{x_n}{5} + iy_n.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5}$ et $y_{n+1} = y_n$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{x_0}{5^n}$ et $y_n = y_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{x_0}{5^n} + iy_0$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = iy_0 = i\mathrm{Im}\left(u_0\right).$$

B est vrai et le reste est faux.

Question 32 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 32 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}(2k) = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 50 \times 51 = 2550$. A et B sont faux.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{50}(2k-1) = \frac{(1+99) \times 50}{2} = 2500$. C et D sont faux.

Question 33 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 33 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et de même $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

A est vrai et B est faux (pour $n = 1$ par exemple). En additionnant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient par télescopage,

$$\sqrt{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n},$$

et en particulier, pour $n = 10000$, $100 > \displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{10001} - 1 > 100 - 1 = 99$. Donc,

$$\left\lfloor \sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{k}} \right\rfloor = 99.$$

C est vrai et D est faux.

Question 34 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : On note T_λ la tangente à la courbe C_λ en son point d'abscisse 1.

Pour tout réel x, $f'_\lambda(x) = \dfrac{(x^2+1)-(x+\lambda)(2x)}{(x^2+1)^2}$ puis $f'_\lambda(1) = \dfrac{2-2(1+\lambda)}{4} = -\dfrac{\lambda}{2}$. On note que les coefficients directeurs des tangentes T_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont deux à deux distincts et donc les tangentes T_λ sont deux à deux sécantes. B et C sont faux.

Puisque $f_\lambda(1) = \dfrac{1+\lambda}{2}$, une équation de la tangente à la courbe C_λ en son point d'abscisse 1 est $y = \dfrac{1+\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2}(x-1)$ ou encore

$$T_\lambda \;:\; y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}.$$

T_0 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}$ et T_1 a pour équation $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$. Le point commun à ces deux tangentes est le point I $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.
I est le seul point pouvant être commun à toutes les tangentes T_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$-\lambda_2 x_I + \lambda + \frac{1}{2} = -2 \times \frac{\lambda}{2} + \lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = y_I$$

et donc le point I est commun à toutes les tangentes T_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$. A est vrai et D est faux.

Question 35 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 35 : On note A, B et M les points d'affixe respectives 2, $-i$ et z. Pour $z \neq -i$, (ce qui équivaut à $M \neq B$),

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \text{ car B n'est pas solution de cette dernière égalité.}$$

L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[AB]$, qui est une droite. A est faux et B est vrai. Ensuite, pour $z \neq -i$,

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } \left(z \neq 2 \text{ et } \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \text{ privé du point B.} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B. C et D sont faux.

Question 36 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 36 : La fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}(x) - \text{Arcsin}(2x)$ est définie sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. f est strictement décroissante sur cet intervalle en tant que somme des fonctions $x \mapsto \text{Arccos}(x)$ et $x \mapsto -\text{Arcsin}(2x)$, toutes deux strictement décroissantes sur cet intervalle. En particulier, la fonction f s'annule au plus une fois sur cet intervalle ou encore l'équation proposée admet au plus une solution (puis B est faux).

On sait que pour tout $y \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(y)) = \sqrt{1 - y^2}$. Puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

$\cos\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \cos\left(\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$.

Ainsi, les deux nombres $\text{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ et $\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ont le même cosinus. De plus, ces deux nombres sont dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. L'équation proposée a une solution et une seule à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. D est vrai et le reste est faux.

