J. 22 1198

RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE

Liberté
Égalité
Fraternité

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 2022

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 page de consignes (recto-verso),
- 1 page d'avertissement (recto), page 1
- 9 pages de texte (recto-verso) numérotées de 2 à 10

TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée : bleue ou noire. Vous devez **cocher** lisiblement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.

2) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.

3) Si vous voulez **modifier** votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la 2ème ligne.

4) Si vous voulez **annuler** votre réponse, vous devez cocher la case « Ann ». Dans ce cas-là, aucune réponse ne sera prise en compte.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

   Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

   Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

   ► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
   la ligne correspondante doit rester vierge.

   ► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
   vous devez cocher l'une des cases A, B, C, D.

   ► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
   vous devez cocher deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

   ► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
   vous devez alors cocher la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

Pour tout n entier vérifiant $n \geq 2$ on définit les suites x_n et y_n par :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ et } y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Question 1

On peut établir :

A) $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{(n-p)!}{p!n^p}$

B) $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!n^p}$

C) $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(n-p)!n^p}$

D) $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n!}{p(n-p)!n^p}$

Question 2

Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $p \in \{2,3,\dots,n\}$, on a l'inégalité :

A) $\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!n^p} \leq \frac{(n+1)n\dots(n+1-p+1)}{p!(n+1)^p}$

B) $\frac{n!}{p(n-p)!n^p} \leq \frac{(n+1)!}{(p+1)(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

C) $\frac{p!}{(n-p)!n^p} \geq \frac{(p+1)!}{(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

D) $\frac{n!}{p(n-p)!n^p} \geq \frac{(n+1)!}{(p+1)(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

Question 3

On peut ainsi en déduire que :

A) Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n est croissante.

B) Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n est décroissante.

C) Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n n'est ni croissante, ni décroissante.

D) Il existe un entier $k > 2$ tel que la suite (x_n) soit décroissante pour $n \leq k$, puis croissante pour $n > k$.

Question 4

On établit que :

A) Pour tout entier $p \geq 1$, on a $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p+1}}$.

B) Pour tout entier $p \geq 1$, on a $\frac{1}{p!} \geq \frac{1}{2^{p-1}}$.

C) Pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 \leq x_n \leq y_n < 3$.

D) Pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 \leq y_n \leq x_n < 3$.

Question 5

Des résultats précédents, on déduit :

A) La suite x_n diverge vers $+\infty$.
B) La suite x_n n'admet pas de limite.
C) La suite x_n converge vers $\bar{x} = 3$.
D) La suite x_n converge vers une limite $\bar{x} < 3$.

Question 6

Pour tout entier $k \geq 2$ et tout entier $n \geq k$, on peut établir que :

A) $x_n \geq 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$

B) $x_n \leq 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$

C) $x_n \geq 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$

D) $x_n \geq 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$

Question 7

Ainsi, on en déduit :

A) La suite y_n diverge vers $+\infty$.
B) La suite y_n converge vers $\bar{y} = \bar{x}$.
C) La suite y_n converge vers $\bar{y} = 3$.
D) La suite y_n converge vers une limite $\bar{y} > \bar{x}$.

PARTIE II

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, O_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et pour tout $(i,j) \in (\{1,2\})^2$, $M_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1.
L'ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles.
L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. L'application identité de $\mathbb{R}^2$ est notée Id.

Question 8

On peut montrer que :

A) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
B) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.
C) Quelles que soient les matrices M et N de $GL_2(\mathbb{R})$, la somme $M + N$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$.
D) Quelles que soient les matrices M et N de $GL_2(\mathbb{R})$, le produit $M \times N$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$.

Question 9

Pour tous $i, j, k, l \in \{1,2\}$, on a :

A) $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,j}$ si $i = j = k$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon
B) $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,l}$ si $i = k = l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon
C) $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{j,l}$ si $i = j = l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon
D) $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,l}$ si $j = k = l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon

On note $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Question 10

Par calcul, on obtient :

A) $S^2 = I_2$ et ainsi, pour tout $n \geq 2$, $S^n = I_2$
B) Pour tout $n \geq 2$, $S^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
C) $R^2 = R$ et ainsi, pour tout $n \geq 2$, $R^n = R$
D) $R^4 = R$ et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $l \in \{0,1,2\}$, on a $R^{3k+l} = R^l$

Question 11

On pose $G_1 = \{I_2, S\}$ et $G_2 = \{I_2, R, R^2\}$:

A) Quelles que soient les matrices M et N de G_1, la somme $M + N$ appartient à G_1.
B) Quelles que soient les matrices M et N de G_2, la somme $M + N$ appartient à G_2.
C) Quelles que soient les matrices M et N de G_1, le produit $M \times N$ appartient à G_1.
D) Quelles que soient les matrices M et N de G_2, le produit $M \times N$ appartient à G_2.

Les ensembles $V(G_1)$ et $V(G_2)$ désignent respectivement les sous-espaces vectoriels engendrés par G_1 et G_2.

Question 12

On montre que :

A) $V(G_1)$ est de dimension 1
B) $V(G_1)$ est de dimension 2
C) $V(G_1)$ est de dimension 3
D) $V(G_1)$ est de dimension 4

Question 13

On montre que :

A) $V(G_2)$ est de dimension 1
B) $V(G_2)$ est de dimension 2
C) $V(G_2)$ est de dimension 3
D) $V(G_2)$ est de dimension 4

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^2$, on pose :
$H = \{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \varphi(\vec{u}) \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}\}$.

Question 14

L'ensemble H vérifie :

A) H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
B) H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$
C) H est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
D) H est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ indépendant de $\vec{u}$, on appelle p la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ parallèlement à $\mathbb{R} \cdot \vec{v}$, et q la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ parallèlement à $\mathbb{R} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

Question 15

La matrice de p dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

A) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
B) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
C) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 16

La matrice de q dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

A) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
B) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
C) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D) $M_{(\vec{u},\vec{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 17

Ainsi, on peut montrer que :

A) H est de dimension 1
B) H est de dimension 2
C) H est de dimension 3
D) H est de dimension 4

Question 18

Le déterminant $\begin{vmatrix} b & d-a & 0 \\ -c & 0 & a-d \\ 0 & -c & b \end{vmatrix}$ vaut :

A) b
B) $bc(a-d)$
C) 0
D) $2bc(a-d)$

PARTIE III

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés; pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

Question 19

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés, et en le lançant on obtient le chiffre 6. La probabilité que ce dé soit pipé vaut :

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{8}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$

Question 20

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés, et en le lançant n fois on obtient n fois le chiffre 6. La probabilité que ce dé soit pipé vaut :

A) $\frac{1}{2^{n+2}}$
B) $\frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$
C) $\frac{1}{3^n}$
D) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}$

On définit le sous-ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$ par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$$

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformes sur T. Pour $K \subset \mathbb{R}^2$, on définit la fonction indicatrice $\mathbb{1}_K$ par :

$$\mathbb{1}_K(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x, y) \in K \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et pour $I \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction $\mathbb{1}_I$ par :

$$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Question 21

La densité $p_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) est donnée par :

A) $p_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{1}_T(x, y)$
B) $p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2} \times \mathbb{1}_T(x, y)$
C) $p_{(X,Y)}(x, y) = xy \times \mathbb{1}_T(x, y)$
D) $p_{(X,Y)}(x, y) = (1 - x)y \times \mathbb{1}_T(x, y)$

Question 22

La densité marginale p_X de X est donnée par :

A) $p_X(x) = (1 - x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
B) $p_X(x) = \frac{1}{2}(1 - x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
C) $p_X(x) = 2(1 - x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

D) $p_X(x) = x \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

Question 23

On en déduit que la densité marginale p_Y de Y vaut :

A) $p_Y(y) = y \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$
B) $p_Y(y) = (1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$
C) $p_Y(y) = \frac{1}{2}(1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$
D) $p_Y(y) = 2(1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

Question 24

Les variables aléatoires X et Y :

A) sont indépendantes car $p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) \times p_Y(y)$
B) sont indépendantes car pour tous $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, on a :
$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$$
C) ne sont pas indépendantes car T n'est pas symétrique par rapport à ses coordonnées x et y
D) ne sont pas indépendantes car il existe $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ tels que :
$$P(X \in I, Y \in J) \neq P(X \in I)P(Y \in J)$$

Question 25

Un calcul donne :

A) $E(XY) = \frac{1}{3}$
B) $E(XY) = \frac{1}{4}$
C) $E(XY) = \frac{1}{9}$
D) $E(XY) = \frac{1}{12}$

PARTIE IV

Question 26

L'équation $x^3 - x^2 + x + 1$:

$x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

A) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$,
B) admet une seule solution dans $\mathbb{Q}$,
C) admet deux solutions dans $\mathbb{Q}$,
D) admet trois solutions dans $\mathbb{Q}$.

Soit u_n la suite d'entiers définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 15$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

Question 27

On peut établir que :

A) tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 5,
B) tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 6,
C) tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 15,
D) u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Question 28

On obtient alors :

A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise u_n,
B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise u_n,
C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise u_n,
D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise u_n.

Question 29

Ainsi, PGCD(u_n, u_{n+1}) est constant et vaut :

A) 1
B) 2
C) 5
D) 6

Question 30

Les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$ sont :

A) 1,3,5,7
B) −3,3,5,11
C) −1,3,5,9
D) 2,3,5,6

PARTIE V

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^{x^2}$

Question 31

La fonction f réalise une bijection de :

A) $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$
B) $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$
C) $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}$
D) $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Question 32

Un développement limité d'ordre 4 de f en 0 est :

A) $f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
B) $f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
C) $f(x) = x + x^3 + o(x^4)$
D) $f(x) = x - x^3 + o(x^4)$

Question 33

Un développement limité d'ordre 4 de f^{-1} en 0 est :

A) $f^{-1}(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
B) $f^{-1}(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
C) $f^{-1}(x) = x + x^3 + o(x^4)$
D) $f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^4)$

PARTIE VI

Question 34

On vérifie que :

A) La décomposition de $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$P(X) = X^2(X-3)^2$$
B) La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$Q(X) = (X^2 - 3X - 3i)(X^2 - 3X + 3i)$$
C) La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :
$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)$$
D) La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :
$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)$$

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

Question 35

On établit que :

A) Toutes les racines de P' sont réelles et distinctes,
B) Toutes les racines de P' sont réelles mais pas forcément distinctes,
C) Toutes les racines de P' sont distinctes, mais certaines peuvent être complexes conjuguées,
D) Les racines de P' ne sont ni forcément distinctes, ni forcément réelles.

Question 36

Le polynôme $P^2 + 1$:

A) n'admet que des racines réelles et distinctes
B) n'admet que des racines complexes non réelles et distinctes
C) n'admet que des racines distinctes, certaines étant réelles et d'autres complexes conjuguées,
D) peut admettre des racines multiples.