CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Question 1 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 1 : Si $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, 0\right[$, $-1 < \tan(\alpha) < 0$ puis $0 < \tan^2(\alpha) < 1$ puis $\mathrm{Re}(z) = 1 - \tan^2(\alpha) > 0$. Donc, A) est faux.
$\dfrac{z}{1+\tan^2(\alpha)} = \dfrac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} + i\dfrac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = e^{2i\alpha}$ et donc

$$z = \left(1+\tan^2(\alpha)\right) e^{2i\alpha} \quad (*).$$

En particulier, $\mathrm{Re}(z) = \left(1+\tan^2(\alpha)\right)\cos(2\alpha)$ et $\mathrm{Im}(z) = \left(1+\tan^2(\alpha)\right)\sin(2\alpha)$. Donc, C) est faux et D) est vrai.
On note que, quand α tend vers $-\dfrac{\pi}{4}$, $\left(1+\tan^2(\alpha)\right)\cos(\alpha)$ tend vers $\sqrt{2}$ alors que $\mathrm{Re}(z)$ tend vers 0 ce qui confirme que C) est faux.
Puisque $1+\tan^2(\alpha) > 0$, $(*)$ montre que $\arg(z) = 2\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B) est faux.

Question 2 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 2 : Si $n = 10p+5$, $p \in \mathbb{N}$, alors $n^2 = 100p^2 + 100p + 25 = 100p(p+1) + 25 = 25+$ des centaines. Donc, l'écriture décimale de n^2 se termine par 25 et en particulier par 5. Donc, A) et B) sont vrais et D) est faux. Enfin, $25^2 = 625$ et donc C) est faux.

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 3 : $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^k = 2^k e^{\frac{2ik\pi}{3}} = 2^k j^k.$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, modulo 2π, $\arg(z) \in \left\{0, \pm\dfrac{2\pi}{3}\right\}$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\arg\left(\left(-1+i\sqrt{3}\right)^k\right) \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ puis $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^k \notin i\mathbb{R}$.
D) est vrai et le reste est faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : Pour tout réel x, $F'(x) = \left(\sin^2(x)\right) \geqslant 0$ et de plus, F' n'est nulle sur aucun intervalle de longueur non nulle. Donc, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation proposée admet au plus une solution sur $\mathbb{R}$. A) et B) sont faux.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^x (1-\cos(2t))\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \geqslant \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty > 100$. Comme $F(0) = 0 < 100$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation proposée a au moins une solution et finalement une solution et une seule. C) est vrai et D) est faux.

Question 5 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 5 : Si on note X la variable aléatoire égale aux nombre de bonnes réponses du candidat, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{3}$. La probabilité demandée est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{81-16}{81} = \frac{65}{81}.$$

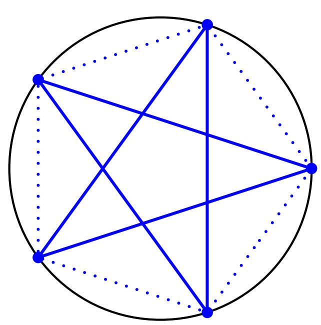
D) est vrai et le reste est faux.

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 : Le nombre de droites est le point de paires de l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$. Il y en a $\dbinom{5}{2} = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$. Δ contient donc 10 droites. B) est faux. Parmi ces 10 droites, 5 sont des côtés et 5 des diagonales. Les points d'intersection distincts des sommets sont obtenus comme point d'intersection de deux diagonales. Il y a 5 diagonales (donc C) est faux) qui fournissent 5 points d'intersection distincts des sommets (donc A) est faux).

Il y a autant de triangles que de parties à 3 éléments de $\{A, B, C, D, E\}$ et donc il y a $\dbinom{5}{3} = \dbinom{5}{2} = 10$ triangles formés par 3 sommets. D) est faux.



Question 7 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 : Les phrases (i) et (ii) peuvent s'alléger en « rouge d'un côté $\Rightarrow$ verte de l'autre » et « jaune d'un côté $\Rightarrow$ noire de l'autre ».
En ne retournant que 1, 3, 4 ,5, 6 et donc pas 2, on a tous les renseignements nécessaires pour savoir si (i) est vrai, car si l'arrière de 2 est rouge, alors l'autre face est effectivement verte de sorte que i) n'est pas contredite et si elle n'est pas rouge, i) n'est pas contredite non plus. A) est vraie.
Pour les mêmes raisons, il n'est pas nécessaire de retourner 2 pour savoir si i) est vrai. B) est faux. De même, il n'est pas nécessaire de retourner 3 ou 4 pour savoir si ii) est vrai. C) est faux.
Enfin, retourner 6 ne suffit pas pour savoir si ii) est vrai car derrière 5, il peut y avoir du jaune. Donc, D) est faux.

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : D) est faux.
$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3}x+y=2\\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-\sqrt{3}x+2\\ x^2+\left(-\sqrt{3}x+2\right)^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-\sqrt{3}x+2\\ 4x^2-4\sqrt{3}x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-\sqrt{3}x+2\\ \left(2x-\sqrt{3}\right)^2=0\end{array}\right.$ ce qui fournit un point et un seul, à savoir $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. B) est vrai et les autres sont faux.

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 9 :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t^2\cos(t)\ dt &= \left[t^2\sin(t)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2t\sin(t)\ dt = -2\int_0^{\pi} t\sin(t)\ dt = -2\left([t(-\cos(t)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos(t))\ dt\right)\\ &= 2\pi\cos(\pi)=-2\pi.\end{aligned}$$

D) est vrai et le reste est faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 10 : $\alpha^2=\alpha+1$ puis $\alpha^4=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1=3\alpha+2$ puis $\alpha^5=3\alpha^2+2\alpha=3(\alpha+1)+2\alpha=5\alpha+3$.
C) est vrai et le reste est faux.

Question 11 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : On note p le prix d'une quantité q de marchandise. En demandant une réduction de 10% du prix de la marchandise, la quantité q a un prix $p' = 0,9p$.
En demandant une augmentation de 10% de la quantité de marchandise (pour le même prix), $1,1q$ a un prix égal à p et donc une quantité q de marchandise a un prix égal à $p'' = \dfrac{p}{1,1}$. Ensuite, $0,9 \times 1,1 = 0,99 < 1$ et donc $0,9 < \dfrac{1}{1,1}$.
Il est donc plus avantageux de demander une réduction de prix de 10% qu'une augmentation de quantité de 10%. A) est vrai et le reste est faux.

Question 12 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 : f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, B) est vrai et A) est faux.

$$f(x) = e^{-2x}\left|\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right| = e^{-2x}\left|\sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right| \underset{x \to \frac{1}{2}}{\sim} \frac{\pi}{e}\left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

ou encore $f(x) \underset{x \to \frac{1}{2}}{=} \dfrac{\pi}{e}\left|x - \dfrac{1}{2}\right| + o\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$. Donc, f est dérivable à droite et à gauche en $\dfrac{1}{2}$ et $f'_d\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{e} \neq -\dfrac{\pi}{e} = f'_g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. f n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$. C) est vrai et D) est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 13 : Pour $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \dfrac{\sin^6(x)}{6}$ puis

$$\begin{aligned}\sin^6(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{64}\left(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(10 - 15\cos(2x) + 6\cos(4x) - \cos(6x)\right),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}6I &= \frac{5}{16} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}\left[-\frac{15\sin(2x)}{2} + \frac{3\sin(4x)}{2} - \frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{64} + \frac{1}{32}\left(-\frac{15}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5\pi}{64} - \frac{44}{6 \times 32} \\ &= \frac{15\pi - 44}{3 \times 64} = \frac{15\pi - 44}{192}.\end{aligned}$$

et donc $I = \dfrac{15\pi - 44}{6 \times 192} = \dfrac{15\pi - 44}{1152}$. D) est vrai et le reste est faux.

Question 14 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 14 : Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = an+b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - 2v_n = (a(n+1)+b) - 2(an+b) = -an+a-b$. La suite v est solution si et seulement si $-a = -1$ et $a - b = 1$ ou encore $a = 1$ et $b = 0$. La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = n$ est solution de la récurrence. Par suite,

$$\begin{aligned} u \text{ solution} &\Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = v_{n+1} - 2v_n \Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - v_{n+1} = 2\left(u_n - v_n\right) \\ &\Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n = 2^n\left(u_0 - v_0\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n. \end{aligned}$$

A) et C) sont vrais et B) et D) sont faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}(A) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$ puis

$$P(A) - P(A \cap B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,32$$

et donc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,32 = 0,52.$$

B) est vrai et le reste est faux.

Question 16 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 16 : Si le carré est rouge, alors le cercle est vert d'après i) puis le losange est bleu (car les couleurs sont deux à deux distinctes). Mais alors d'après iii), puisque le cercle n'est pas rouge, le losange est vert ce qui est une contradiction. Donc, le carré n'est pas rouge. Si le carré est vert, alors le cercle est bleu d'après ii) puis le losange est rouge. Mais puisque le cercle n'est pas rouge, le losange est vert d'après iii), ce qui est une contradiction. Donc, le carré n'est pas vert puis

le carré est bleu.

Il reste le vert et le rouge comme couleurs pour le cercle et le losange. Si le cercle est vert et donc pas rouge, alors le losange est vert d'après iii) ce qui est impossible. Donc,

le cercle est rouge et le losange est vert.

En résumé, le carré est bleu, le cercle est rouge et le losange est vert. Tout est faux.

Question 17 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 17 : L'espérance de Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0,15\times(-10)+0,25\times(-7)+0,2\times 0+0,2\times 3+0,15\times 12+0,05\times 16 = -1,5-1,75+0,6+1,8+0,8 \\ &= -3,25+3,2<0. \end{aligned}$$

Le jeu est défavorable au joueur ou encore favorable à la banque et en particulier est inéquitable. C) et D) sont vrais et A) et B) sont faux.

Question 18 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{ix}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}(0) = 0$ (la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle). A) est vrai et le reste est faux.

Question 19 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 19 :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right)K_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(kx)-\cos((k+1)x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\cos(nx)\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

D) est vrai et le reste est faux.

Question 20 :
A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 20 : Les fonctions $a\ :\ x\mapsto 1-\dfrac{1}{x}$ et $b\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sont continues sur I_1 (resp. sur I_2). Les solutions de (E_1) (resp. (E_2)) sur I_1 (resp. sur I_2) constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 et les solutions de l'équation homogène associée constituent un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension 1.

$x\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'+(1-x)\dfrac{e^x}{x} = x\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}+(1-x)\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{xe^x-e^x+e^x-xe^x}{x} = 0$. Donc, $f_0\ :\ x\mapsto\dfrac{e^x}{x}$ est une solution non nulle de $(E_{1,h})$ (resp. $(E_{2,h})$) sur I_1 (resp. sur I_2) puis $\mathscr{S}_{1,h} = \mathrm{Vect}(f_0) = \left\{x\mapsto k\dfrac{e^x}{x},\ k\in\mathbb{R}\right\}$ et de même pour $\mathscr{S}_{2,h}$. Mais A) est faux (Une solution ... sur les intervalles ... sont les fonctions ...).

$x\left(-\dfrac{1}{x}\right)' + (1-x)\left(-\dfrac{1}{x}\right) = x \times \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 1 = 1$. La fonction $f_1 \ : \ x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est une solution particulière de (E_1) (resp. (E_2)) sur I_1 (resp. sur I_2). Donc, $\mathscr{S}_1 = f_1 + \text{Vect}(f_0) = \left\{x \mapsto \dfrac{ke^x - 1}{x},\ k \in \mathbb{R}\right\}$ et de même pour $\mathscr{S}_2$. B) est vrai.

Si $k = 1$, $\dfrac{ke^x - 1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1$ et si $k \neq 1$, $\dfrac{ke^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{k-1}{x} \underset{x \to 0}{\to} \pm\infty$. Donc, C) est vrai et D) est faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : Le chagement de variables $x \mapsto 1 - x$ montre que $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $B(p, q) = B(q, p)$. Donc, B) et D) sont faux (l'expression de $B(p, q)$ doit être symétrique en p et q). $B(1, 1) = 1 \neq \dfrac{0! \times 0!}{(1+1)!}$. Donc, A) est faux.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\ dx = \left[-x^p \frac{(1-x)^q}{q}\right]_0^1 + \int_0^1 p x^{p-1} \frac{(1-x)^q}{q}\ dx \\ &= \frac{p}{q} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\ dx = \frac{p}{q} B(p, q+1). \end{aligned}$$

Mais alors, pour $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \frac{p-1}{q} B(p-1, q+1) = \frac{(p-1)(p-2)}{q(q+1)} B(p-2, q+2) = \ldots = \frac{(p-1)(p-2)\ldots 1}{q(q+1)\ldots(p+q-2)} B(1, p+q-1) \\ &= \frac{(p-1)!}{q(q+1)\ldots(p+q-2)(p+q-1)} = \frac{(p-1)! \times (q-1)(q-2)\ldots 1}{1\ldots(q-1)q(q+1)\ldots(p+q-2)(p+q-1)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 1$. C) est vrai.

Question 22 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 : $15! = (3 \times 5) \times (2 \times 7) \times 13 \times (2^2 \times 3) \times 11 \times (2 \times 5) \times \left(3^2\right) \times \left(2^3\right) \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times \left(2^2\right) \times 3 \times 2$ et donc

$$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1.$$

Le nombre de diviseurs de 15! est $(11+1) \times (6+1) \times (3+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$. B) est vrai et le reste est faux.

Question 23 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : $100 = 8\times 13 - 4$ et donc $100 \equiv -4$ [13] puis $100^{100} \equiv (-4)^{100}$ [13] ou encore $100^{100} \equiv 4^{100}$ [13]. $4 \wedge 13 = 1$ et donc, d'après le petit théorème de FERMAT, $4^{12} \equiv 1$ [13]. Mais alors,

$$4^{100} = 4^{8\times 12+4} = \left(4^{12}\right)^8 \times 4^4 \equiv 4^4\ [13].$$

Enfin, $4^4 = 16^2 \equiv 3^2$ [13] et donc $100^{100} \equiv 9$ [13] avec $0 \leqslant 9 < 13$. Le reste demandé est 9. A) est vrai et le reste est faux.

Question 24 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 24 : Soit $z \in \mathbb{C}$. La classe d'équivalence de z est l'ensemble des nombres complexes u tels que $u\mathscr{R}z$ ou encore tels que $|u| = |z|$ ou encore le cercle de centre O et de rayon $|z|$. C) et D) sont vrais et A) et B) sont faux.

Question 25 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 25 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+b+7c=0 \\ 5b+5c=0 \\ a+2c=0 \\ -2a-b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-c \\ a=-2c \\ 3(-2c)+(-c)+7c=0 \\ -2(-2c)-(-c)+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{array}\right.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est libre. A) est vrai et B) est faux.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 &\Rightarrow \left(b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 2b^2 + 2bc\sqrt{6} + 3c^2 = a^2 \\ &\Rightarrow 2bc\sqrt{6} = a^2 - 2b^2 - 3c^2. \end{aligned}$$

Si $bc \neq 0$, $\sqrt{6} = \dfrac{a^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Donc, $bc = 0$. Si $b \neq 0$, alors $c = 0$ puis $a + b\sqrt{2} = 0$ et donc $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Donc, $b = 0$ et de même $c = 0$ et enfin a$= 0$.

La famile $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre. C) est vrai et D) est faux.

Question 26 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 26 :
La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ a le même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$
$(C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$

1er cas. Supposons a, b et c, deux à deux distincts. M a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ $\left(C_2 \leftarrow \dfrac{1}{a-b}C_2\right.$ et $\left(C_3 \leftarrow \dfrac{1}{a-c}C_3\right)$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix}$ $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ et enfin que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est inversible (triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls) et donc de rang 3.
Dans ce cas, M est de rang 3. Donc, A) est vrai et B) est faux.

2ème cas. Si $c = b \neq a$ (ou $c = a \neq b$ ou $b = a \neq c$ par symétrie des rôles), $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & a+b & a+b \\ b^2 & ab & ab \end{pmatrix}$ puis M a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2b & a+b \\ b^2 & ab \end{pmatrix}$ $(C_3 = C_2)$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b & a-b \\ b^2 & b(a-b) \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b & 1 \\ b^2 & b \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est de rang 2 et donc $\mathrm{rg}(M) = 2$. D) est vrai et C) est faux.

Question 27 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 27 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{1-4\cos^2(x)} = 20 \Leftrightarrow 2 \times 2^{4\cos^2(x)} + 32 \times 2^{-4\cos^2(x)} = 20 \\ &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2(x)} - 10 + \frac{16}{2^{4\cos^2(x)}} = 0 \Leftrightarrow \left(2^{4\cos^2(x)}\right)^2 - 10 \times 2^{4\cos^2(x)} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2(x)} \text{ est solution de l'équation } z^2 - 10z + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2(x)} = 2 \text{ ou } 2^{4\cos^2(x)} = 8 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2(x)} = 2^1 \text{ ou } 2^{4\cos^2(x)} = 2^3 \\ &\Leftrightarrow 4\cos^2(x) = 1 \text{ ou } 4\cos^2(x) = 3 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

A) « est vrai » et le reste est faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 : On note f la fonction $x \mapsto \tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$. Pour $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } x \notin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \text{ et } x \notin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \text{ et } x \notin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\} \end{aligned}$$

f est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$.

Sur chacun de ces 10 intervalles, f est continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes et en particulier, f s'annule au plus une fois par intervalle.

f s'annule une fois et une seule sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right[$ et une fois et une seule sur $\left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$ à savoir en 0 et en π. Il reste 8 intervalles à étudier.

Pour tout x de D_f, $f(\pi - x) = -f(x)$. Donc, f s'annule dans l'un des quatre intervalle $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[$ ou $\left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si f s'annule dans l'intervalle symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$ correspondant. Donc, f s'annule un nombre pair de fois puis A) et C) sont faux.

En $a = \frac{\pi}{8}$ ou $a = \frac{\pi}{6}$ ou $a = \frac{\pi}{4}$ ou $a = \frac{3\pi}{8}$, on a immédiatement $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, car une et une seule des quatre fonctions tend vers l'infini.

Donc, si I est l'un des trois intervalles $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[$, f réalise une bijection de I sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution par intervalle. On a déjà obtenu $2 + 3 \times 2 = 8$ solutions.

Il reste à déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$. $\tan(x)$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x) + \tan(4x)$ tendent vers 0. Donc, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Le comportement est finalement le même que sur les intervalles précédents ce qui fournit encore 2 solutions. Au total, l'équation proposée a exactement 10 solutions dans $[0, \pi]$. D) est vrai et le reste est faux.

Question 29 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 29 : Soit $F = \frac{2X^5 - 8X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2} = \frac{P}{Q}$. 0 n'est pas racine de P et $P(1) = 2 - 8 + 8 - 4 + 1 = -1 \neq 0$. Donc, F est sous forme irréductible. La partie entière de F est de degré $5 - 5 = 0$. F admet 0 pour pôle d'ordre 3 et 1 pour pôle d'ordre 2. Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$F = a + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2} + \frac{b_3}{X^3} + \frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{(X-1)^2}.$$

- $a = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$ car $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2x^5}{x^5} = 2$.
- $b_3 = \lim\limits_{x \to 0} x^3 F(x) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1$. Donc, A) et D) sont faux.
- $c_2 = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{P(1)}{1^3} = -1$. Donc,

$$F = 2 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2} + \frac{1}{X^3} + \frac{c_1}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2}$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2} + \frac{c_1}{X-1} &= F - 2 - \frac{1}{X^3} + \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{2X^5 - 8X^3 + 8X^2 - 4X + 1 - 2X^3(X-1)^2 - (X-1)^2 + X^3}{X^3(X-1)^2} \\
&= \frac{4X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 2X}{X^3(X-1)^2} = \frac{X(X-1)\left(4X^2 - 5X + 2\right)}{X^3(X-1)^2} \\
&= \frac{4X^2 - 5X + 2}{X^2(X-1)} = G.
\end{aligned}$$

- $b_2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 G(x) = \frac{2}{0-1} = -2$.
- $c_1 = \lim\limits_{x \to 1} (x-1) G(x) = \frac{4 - 5 + 2}{1^2} = 1$.
- $b_1 + c_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x G(x) = 4$ et donc $b_1 = 4 - c_1 = 3$.

$$F = 2 + \frac{3}{X} - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2}$$

En partant du principe que le terme $(x-2)/(x-1)^2$ est une coquille devant être effacée, on parie sur le fait que C) est vrai et B) est faux. Mais le plus simple aurait été de ne pas répondre à cette question.

Question 30 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 :

$$f(x) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} \frac{1}{x}\ln\left(1+\sin^2(x)\right) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} \frac{1}{x}\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} x+o(x) \underset{x\to 0,\ x\neq 0}{=} f(0)+1\times x+o(x).$$

En tenant compte de $f(0)=0$, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. En particulier, f est continue en 0. A) est faux et B) est vrai.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\ln(2)}{\pi}\neq\dfrac{2\ln(2)}{3\pi}=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Donc, f n'est pas π-périodique. C) est faux.

Pour $x>0$, $0\leqslant f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\sin^2(x)\right)\leqslant\dfrac{\ln(2)}{x}$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. D) est faux.

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 31 : Pour $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1+0^n)^2}=1$. La suite (I_n) est bornée. A) est faux.

Pour $t\in[0,1]$, $0\leqslant t\leqslant 1$ puis $0\leqslant t^{n+1}\leqslant t^n$ (après multiplication des deux membres par $t^n\geqslant 0$) puis $\dfrac{1}{(1+t^n)^2}\leqslant\dfrac{1}{(1+t^{n+1})^2}$ puis $I_n\leqslant I_{n+1}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (et même strictement croissante). B) est faux.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Donc, cette suite converge vers un certain réel $\ell\in[0,1]$. D) est faux.

Soit $a\in]0,1[$. Alors, $1-a\in]0,1[$ puis

$$1\geqslant I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^n)^2}\,dt\geqslant\int_0^{1-a}\frac{1}{(1+t^n)^2}\,dt\geqslant(1-a)\frac{1}{\left(1+(1-a)^n\right)^2}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient (puisque $1-a\in]0,1[$) $1-a\leqslant\ell\leqslant 1$. Cet encadrement étant valable pour tout $a\in]0,1[$, quand a tend vers 0, on obtient $\ell=1$. C) est vrai.

Question 32 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 32 : $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n=\dfrac{1}{2}v_n$. Donc, (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=u_1-u_0=1$ et de raison $q=\dfrac{1}{2}$ puis $v_n=\dfrac{1}{2^n}$. C) et D) sont faux.

L'équation caractéristique associée est $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = 0$. Elle admet les solutions $q_1 = 1$ et $q_2 = \frac{1}{2}$. Les suites solutions sont les suites de la forme $a(1)_{n\in\mathbb{N}} + b\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus,

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 1 \\ a + \frac{b}{2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 1 \\ b - \frac{b}{2} = 1 - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2 \\ a = 3 \end{array}\right. .$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - \frac{2}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. A) est faux et B) est vrai.

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 : Le graphe de la fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, est symétrique par rapport au point $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ (point d'intersection des asymptotes). Ici, c'est le point $(1, 1)$. B) est vrai et le reste est faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : Pour $x > 0$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$. Ensuite,

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x}\right) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)$$
$$\underset{x\to0}{=} -\frac{1}{6} + o(1).$$

Donc, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/6}$. B) est vrai et le reste est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 35 : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \geqslant 1$. Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc, A) est faux.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$. Donc, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\frac{n^3}{3^n} < 1$. B) est faux.

Si (v_n) converge vers ℓ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0,1$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 = \ell - \ell \geqslant 0,1$ ce qui est faux. Donc, C) est faux.

La suite (w_n) est arithmétique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $r = -2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{w_n} = e^{-2n+1}$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. D) est vrai

Question 36 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : $P(B \cap A) = P(A) \times P_A(B) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$. Ensuite, puisque $P_{\overline{A}}$ est une probabilité, $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \left(1 - \dfrac{3}{5}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{25}$. Mais alors

$$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{3}{20} + \frac{8}{25} = \frac{15}{100} + \frac{32}{100} = \frac{47}{100}.$$

A) est vrai et le reste est faux.

