J. 13 1039

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ANNÉE 2013**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissements (recto),
- 11 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 11

CALCULATRICE NON AUTORISÉE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

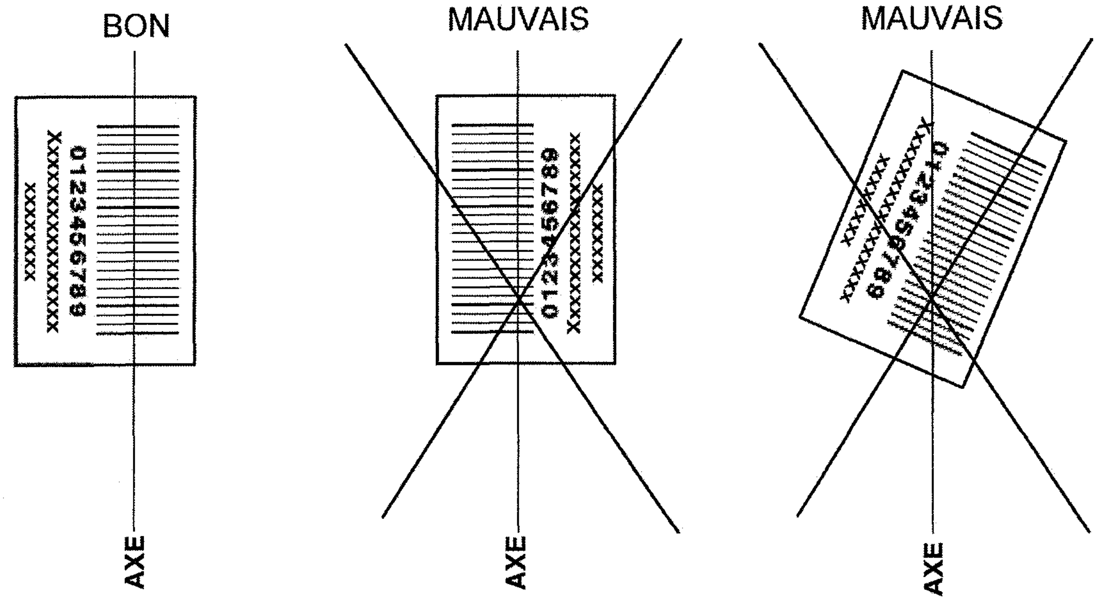
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE et ATTENTION vous devez noircir complètement la case en vue de la bonne lecture optique de votre QCM.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page SVP

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

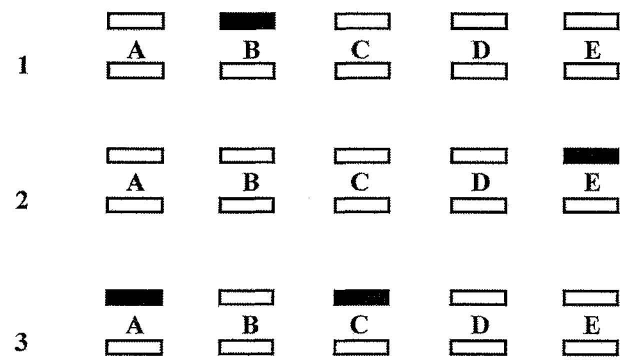
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENTS

L'usage de calculatrices, de téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé.

QUESTIONS LIEES
1 à 8
9 à 29
30 à 36

PARTIE I

Dans toute cette partie on suppose que p est un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_p(\text{IR})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. On désigne par O la matrice nulle et par I la matrice unité de $\mathscr{M}_p(\text{IR})$.
Une matrice A de $\mathscr{M}_p(\text{IR})$ est dite nilpotente d'indice 3 si elle vérifie $A^3 = O$ et A^2 est une matrice non nulle, où A^k désigne le produit de la matrice A par elle-même k fois, k étant un entier naturel non nul.
On suppose dans les trois premières questions (questions 1 à 3) de cette partie que la matrice A de $\mathscr{M}_p(\text{IR})$ est nilpotente d'indice 3.
Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice définie par $E(t) = I + tA + (t^2A^2)/2$

Question 1 : La matrice $E(t)$ vérifie, pour tout t réel,

A) $E(t) + E(s) = E(st)$ pour tout s réel
B) $E(t)\,E(s) = E(s+t)$ pour tout s réel
C) $[E(t)]^n = E(nt)$ pour tout n entier naturel
D) $E(t^n) = nE(t)$ pour tout n entier naturel

Question 2 : La matrice $E(t)$

A) n'est pas inversible pour tout t réel
B) est inversible et a pour inverse $(-E(t))$ pour tout t réel
C) est inversible pour tout t réel et a pour inverse $E(1/t))$ pour tout t réel non nul
D) est symétrique pour tout t réel

Question 3 : L'application de IR dans $\mathscr{M}_p(\text{IR})$ qui à t réel associe la matrice $E(t)$

A) est linéaire
B) est injective car son noyau est réduit à 0
C) est bijective car toute application linéaire injective sur un espace de dimension finie est bijective
D) n'est pas linéaire mais est injective car la famille (I,A,A^2) est libre

Dans toute la suite de cette partie, on note $\mathscr{B}_0 = (e_1,e_2)$ la base canonique de IR^2, on considère la matrice A de $\mathscr{M}_2(\text{IR})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de IR^2 qui lui est canoniquement associé.

Tournez la page SVP

Question 4 : On note F le sous-espace noyau de l'endomorphisme $(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et G le sous-espace noyau de l'endomorphisme $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$.
On montre que :

A) G = 0 et F est un plan vectoriel dont une base est la famille de vecteurs (u,v) définis par u = (3,1) et v = (2,1), les coordonnées de ces vecteurs étant exprimées dans la base $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$

B) F et G sont deux droites vectorielles dont les vecteurs directeurs sont colinéaires

C) F et G sont deux droites vectorielles de vecteurs directeurs respectivement u = (3,1) et v = (2,1), les coordonnées de ces vecteurs étant exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

D) F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$

Question 5 : Reprenant, si elle existe, la famille de vecteurs (u,v) définie dans la question 4, on note P la matrice de passage de la base (u,v) à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on désigne par D la matrice de l'endomorphisme f dans la base (u,v). On a

A) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = PAP^{-1}$

B) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$

C) $A^n = \begin{pmatrix} 3.\,2^n - 2 & -3.\,2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel

D) $A^n = \begin{pmatrix} 3.\,2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -3.\,2^n + 3 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel

On note $\| \; \|$ la valeur absolue. On désigne par g la fonction exponentielle qui à x réel associe $g(x) = e^x$ et on note, pour tout k entier naturel, $g^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction g

Question 6 : Pour tout t réel, on montre que :

A) $\left\| g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k g^{(k)}(0)/k! \right\| \leq (t^n/n!) \sup_{x\in[0,t]} \left\| g^{(n)}(x) \right\|$ pour tout n entier naturel non nul

en appliquant l'inégalité de Taylor à l'ordre n

B) $\left\| g(t) - \sum_{k=0}^{n} t^k g^{(k)}(0)/k! \right\| \leq (t^n/n!) \sup_{x\in[0,t]} \left\| g^{(n)}(x) \right\|$ pour tout n entier naturel non nul

en appliquant l'inégalité de Taylor à l'ordre n

C) $g(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n+1} t^{k-1}/(k-1)!$ car $t^k/k!$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$

D) $\left\| g(t) - \sum_{k=0}^{n} t^k/k! \right\| \leq t^{k+1} g(t)/(k+1)!$ pour tout n entier naturel non nul

Pour tout réel t et pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k A^k/k! = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

On désigne par $E(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ où $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$; $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$; $c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t)$ et $d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$

Question 7 : Pour tout t réel, on établit que:

A) $a(t)=3g(2t)-2g(t)$; $b(t)= -6g(2t)+6g(t)$; $c(t)=g(2t)-g(t)$; $d(t)= -2g(2t)+3g(t)$

B) $a(t)=3g(2t)-2g(t)$; $b(t)=2g(2t)-2g(t)$; $c(t)= -3g(2t)+3g(t)$; $d(t)= -2g(2t)+3g(t)$

C) $E(t) = g(2t)Q + g(t)R$ avec $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

D) $E(t) = g(2t)Q + g(t)R$ avec $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Question 8 : Reprenant, si elles existent, les matrices Q et R définies dans la question 7, on note q et r les endomorphismes de IR^2 canoniquement associés aux matrices, respectivement Q et R. On établit que :

A) les endomorphismes q et r sont des symétries
B) le sous-espace image de l'endomorphisme r est inclus dans le sous-espace noyau de l'endomorphisme q car QR = RQ = O
C) q est la projection sur F parallèlement à G et r est la projection sur G parallèlement à F
D) q est la projection sur G parallèlement à F et r est la projection sur F parallèlement à G

PARTIE II

Pour tout réel a positif ou nul, on note f_a la fonction définie sur IR^*_+ par $f_a(t) = t^a$, IR^*_+ désignant l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On notera $\tilde{f}_a$ le prolongement par continuité, lorsqu'il existe, de la fonction f_a à l'ensemble IR_+ des nombres réels positifs ou nuls.
On désigne par ln la fonction logarithme népérien.

Question 9 : La fonction f_a

A) n'est prolongeable par continuité en 0 que pour a = 0
B) est prolongeable par continuité en 0 en posant, pour tout a réel positif ou nul, $\tilde{f}_a(0) = 0$ car la fonction (a ln t) tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers 0
C) est prolongeable par continuité en 0 en posant, pour tout a strictement positif, $\tilde{f}_a(0) = 0$, mais elle n'est pas prolongeable en 0 pour a = 0
D) est prolongeable par continuité en 0 pour tout a réel positif ou nul en posant, $\tilde{f}_a(0) = 0$ pour tout a strictement positif et $\tilde{f}_0(0) = 1$

Question 10 : La fonction f_a

A) n'est de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR^*_+ pour aucune valeur du réel positif ou nul a
B) a pour dérivée, pour tout a réel positif ou nul, la fonction f_a' définie sur IR^*_+ par $f_a'(t) = t^{a+1}/(a+1)$
C) a pour dérivée, pour tout a réel supérieur ou égal à 1, la fonction f_a' définie sur IR^*_+ par $f_a'(t) = at^{a-1}$
D) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR^*_+ uniquement pour les valeurs du réel a supérieures ou égales à 1

Question 11 : La fonction $\tilde{f}_a$, prolongement par continuité à IR₊ de la fonction f_a, lorsqu'il est possible,

A) n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR_+ pour a réel positif ou nul quelconque

B) n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR_+ pour a réel strictement inférieur à 1

C) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR_+ pour tout a réel supérieur ou égal à 1 car $\tilde{f}_a$ est continue sur IR_+, $\mathscr{C}^1$ sur IR^*_+ et la dérivée f_a' a une limite nulle en 0 pour tout a réel supérieur ou égal à 1

D) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur IR_+ pour tout a réel supérieur ou égal à 1 car $\tilde{f}_a$ est continue sur IR_+, $\mathscr{C}^1$ sur IR^*_+ et la dérivée f_a' a une limite finie en 0 pour tout a réel supérieur ou égal à 1

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On note $h_{a,b}$ la fonction définie sur l'intervalle]0,1[par $h_{a,b}(t) = f_a(t) f_b(1-t)$

Question 12 : La fonction $h_{a,b}$

A) est, pour tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls, prolongeable par continuité en 0, mais elle n'est pas prolongeable en 1

B) n'est prolongeable par continuité ni en 0 ni en 1 pour certains couples (a,b) de réels positifs ou nuls

C) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment [0,1] pour tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls

D) n'est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment [0,1] que pour les réels a et b supérieurs ou égaux à 1

On note, pour tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls tel que l'intégrale $\int_0^1 h_{a,b}(t)\,dt$ existe,

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^1 h_{a,b}(t)\,dt$$

Question 13 : (a,b) étant un couple quelconque de réels positifs ou nuls, on a

A) l'intégrale $\int_0^1 h_{a,b}(t)\,dt$ n'existe pas car $h_{a,b}$ nest pas continue sur le segment [0,1]

B) I(a,b) est bien défini car $h_{a,b}$ est continue sur l'intervalle]0,1[et prolongeable par continuité en 0 et en 1

C) $\mathrm{I}(a,b) = -\,\mathrm{I}(b,a)$

D) $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(b,a)$

Question 14 : Pour tout couple de réels positifs ou nuls (a,b), on établit que :

A) $(b+1)\, I(a+1,b) = (a+1)\, I(a,b+1)$
B) $(a+1)\, I(a+1,b) = (b+1)\, I(a,b+1)$
C) $(a+2)\, I(a+1,b) = b\, I(a,b-1)$
D) $(b+1)\, I(a+1,b) = -(a+1)\, I(a,b+1)$

Question 15 : Pour tout a réel positif ou nul et pour tout entier naturel n, si I(a,b) existe, on a

A) $I(a,0) = 1/a$ pour tout a strictement positif et $I(0,0) = 1$
B) $I(a,0) = 1/(a+1)$
C) $I(a,n) = (n+1)!/((a+1).....(a+n+2))$
D) $I(a,n+1) = -(n+1)I(a+1,n)/(a+1) = (-1)^{n+1}(n+1)!/((a+1).....(a+n+2))$

Question 16 : Soient p et q deux entiers naturels.. On montre que :

A) $I(p,q) = p!q!/(p+q+1)!$
B) $I(p,q) = (-1)^q p!q!/(p+q+1)!$
C) $I(p,q) = p!(q+1)!/(p+q+2)!$
D) $I(p,q) = (p+q+1)!/(p!q!)$

Question 17 : p et q étant deux entiers naturels, on pose

$$J(p,q) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1} d\theta$$

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on établit, à l'aide d'un changement de variable, que :

A) $J(p,q) = I(p,q)$
B) $J(p,q) = 2\, I(p,q)$
C) $J(p,q) = p!q!/(2(p+q+1)!)$
D) $J(p,q) = (-1)^q p!q!/(2(p+q+1)!)$

Pour tout réel α strictement positif, on note g_α l'application qui à x associe $g_\alpha(x) = x \ln(1-(\alpha/x))$

Question 18 : Pour tout α réel strictement positif, l'ensemble de définition de la fonction g_α est

A) l'intervalle $]\alpha,+\infty[$
B) l'intervalle $]-\infty,0[$
C) l'ensemble $]-\infty,0[\cup]\alpha,+\infty[$
D) l'ensemble $]-\infty,0[\cup [\alpha,+\infty[$

Question 19 : Soient α et x deux réels strictement positifs tels que $\alpha < x$. On a :

A) $\sup_{y \in [x-\alpha,x]} |x-(x-\alpha)|/y \leq \ln x - \ln(x-\alpha) \leq \inf_{y \in [x-\alpha,x]} |x-(x-\alpha)|/y$

B) $\inf_{y \in [x-\alpha,x]} |x-(x-\alpha)|/y \leq \ln x - \ln(x-\alpha) \leq \sup_{y \in [x-\alpha,x]} |x-(x-\alpha)|/y$

C) $\alpha \leq g_\alpha(x) \leq \alpha x/(x-\alpha)$

D) $-\alpha x/(x-\alpha) \leq g_\alpha(x) \leq -\alpha$

Question 20 : Pour tout réel α strictement positif, la fonction g_α

A) n'est pas définie sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

B) est décroissante sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

C) est croissante sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

D) est croissante sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$ et décroissante sur l'intervalle $]\beta,+\infty[$ pour β réel de l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

Question 21: Pour tout réel α strictement positif, on note C_α la courbe représentant, dans un repère orthonormé, la restriction, si elle existe, de la fonction g_α à l'intervalle $]\alpha,+\infty[$. On montre que :

A) la fonction g_α tend vers $-\alpha$ lorsque x tend vers $+\infty$

B) la fonction g_α tend vers α lorsque x tend vers $+\infty$

C) la courbe C_α admet une asymptote horizontale d'équation $y= \alpha$ et une asymptote verticale d'équation $x= -\alpha$

D) la courbe C_α admet une asymptote horizontale d'équation $y= -\alpha$ et une asymptote verticale d'équation $x= \alpha$

Question 22 : α étant un réel strictement positif fixé, on considère la suite (y_n) définie, pour tout entier naturel n tel que $n >\alpha$, par $y_n= (1-(\alpha/n))^n$. On établit que :

A) $y_n= \exp(-g_\alpha(n))$ pour tout entier naturel n tel que $n >\alpha$, exp désignant la fonction exponentielle

B) la suite (y_n) est croissante car les fonctions exponentielle et g_α sont croissantes respectivement sur IR et sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

C) la suite (y_n) est décroissante car la fonction g_α est décroissante sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

D) la suite (y_n) converge vers $e^{-\alpha}$ par continuité de la fonction exponentielle sur IR

Pour tout réel positif ou nul x et pour tout entier naturel non nul n, on pose, si l'intégrale existe,

$$F_n(x) = \int_0^n (1-(u/n))^n u^x \, du$$

Question 23 : On montre que, pour tout x réel positif ou nul et pour tout n entier naturel non nul,

A) $F_n(x)$ existe car la fonction qui à u associe $(1-(u/n))^n u^x$ est continue sur l'intervalle $]0,n]$ et prolongeable par continuité en 0

B) $F_n(x) = n^x \, I(x,n)$

C) $F_n(x) = n^{x+1} \, I(x,n)$

D) $F_n(x) = I(x,n)/(n^{x+1})$

Question 24 : Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul, pour tout u appartenant à l'intervalle $]0,n[$, on a

A) $\ln[(1-(u/(n+1)))^{n+1}] \leq \ln[(1-(u/n))^n]$ car g_u est décroissante sur l'intervalle $]u,+\infty[$

B) $\ln[(1-(u/n))^n] \leq \ln[(1-(u/(n+1)))^{n+1}]$ car g_u est croissante sur l'intervalle $]u,+\infty[$

C) $- \int_0^n (1-(u/n))^n u^x \, du \leq - \int_0^n (1-(u/(n+1)))^{n+1} u^x \, du$

D) $\int_0^n (1-(u/n))^n u^x \, du \leq - \int_0^n (1-(u/(n+1)))^{n+1} u^x \, du$

Question 25 : Pour tout x réel positif ou nul fixé, la suite de terme général $F_n(x)$, n entier naturel non nul,

A) est décroissante

B) est croissante

C) n'est ni croissante ni décroissante

D) est constante

Question 26 : Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul, pour tout u appartenant à l'intervalle $]0,n[$, on a

A) $g_u(n) \leq -u$

B) $u \leq g_u(n)$

C) $\displaystyle\int_0^n e^u u^x du \leq F_n(x)$

D) $\displaystyle F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du$

Question 27 : x étant toujours un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul, on montre que :

A) il existe un réel strictement positif V tel que pour tout u supérieur ou égal à V $1/(u^{x+2}) \leq e^{-u}$

B) il existe un réel strictement positif U tel que pour tout u supérieur ou égal à U $e^{-u} \leq 1/(u^{x+2})$

C) il existe un réel strictement positif W tel que $\displaystyle F_n(x) \leq \int_0^W e^{-u} u^x du + (1/W)$

D) pour tout réel strictement positif K, $\displaystyle F_n(x) > \int_0^K e^{-u} u^x du + (1/K)$

Question 28: x étant un réel positif ou nul fixé, la suite de terme général $F_n(x)$, n entier naturel non nul, est

A) convergente car elle est croissante et majorée

B) convergente car elle est décroissante et minorée

C) divergente car elle est croissante et non majorée

D) divergente car elle est décroissante et non minorée

Question 29: Soit x un réel positif ou nul fixé, on note $F(x)$ la limite, si elle existe, de la suite de terme général $F_n(x)$, n entier naturel non nul. On montre que :

A) $F(x) = +\infty$

B) $F_n(x+1) = n(x+1)F_n(x)/(x+n+2)$ pour tout n entier naturel non nul

C) $F(x+1) = x\, F(x)$

D) pour tout entier naturel k, $F(k) = k!$ car la suite de terme général $F_n(0)=n/(n+1)$ converge vers 1

PARTIE III

Texte

On considère l'équation différentielle (E) $(1-x)^2 y' = (2-x) y$ On note I l'intervalle $]-\infty,1[$. On désigne par e la fonction exponentielle

Question 30: L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I est

A) réduit à la fonction nulle
B) une droite vectorielle
C) constitué des fonctions de la forme $(K/(1-x))e^{1/(1-x)}$ où K est un réel quelconque
D) constitué des fonctions de la forme $(C/(1-x))e^{-1/(1-x)}$ où C est un réel quelconque

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle I respectivement par $f(x) = (1/(1-x))e^{1/(1-x)}$ et $g(x) = (1/(1-x))e^{-1/(1-x)}$

Question 31: Les développements limités des fonctions f et g au voisinage de 0 à l'ordre 3 s'écrivent

A) $f(x) = e\,(1+2x+(7x^2/2)+(28x^3/6)+ o(x^3))$ pour la fonction f
B) $f(x) = e\,(1+2x+(7x^2/2)+ o(x^3))$ pour la fonction f
C) $g(x) = e\,(1-(x^2/2)-(2x^3/3)+ o(x^3))$ pour la fonction g
D) $g(x) = e^{-1}\,(1-2x+(7x^2/2)-(34x^3/6)+ o(x^3))$ pour la fonction g

Question 32: Pour tout entier naturel n, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f sur I. On suppose que pour tout n entier naturel il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/(1-x))\, e^{1/(1-x)}$$ pour tout réel x appartenant à I. On établit alors que :

A) $P_0(X) = X$; $P_1(X) = X^3+X^2$; $P_2(X) = X^5+4X^4+2X^3$; $P_3(X) = X^7+9X^6+18X^5+6X^4$
B) $P_0(X) = X$; $P_1(X) = X^3-X^2$; $P_2(X) = X^5-4X^4+2X^3$; $P_3(X) = X^7-9X^6+18X^5-6X^4$
C) $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X))$ pour tout n entier naturel, P_n' désignant le polynôme dérivé
D) $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) + P_n'(X))$ pour tout n entier naturel, P_n' désignant le polynôme dérivé

Question 33: On déduit, en dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), que, pour tout n entier naturel non nul,

A) $P_{n+1}(X) = -[(2n+1)X+X^2]\, P_n(X) + n^2X^2\, P_{n-1}(X)$
B) $P_{n+1}(X) = [(2n+1)X+X^2]\, P_n(X) - n^2X^2\, P_{n-1}(X)$
C) $P_n(X) = [(2n+1)X+X^2]\, P_n(X) - n^2X^2\, P_{n-1}(X)$
D) $P_{n+1}(X) = [(2n+1)X-X^2]\, P_n(X) - n^2X^2\, P_{n-1}(X)$

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$

Question 34: On montre que :

A) pour tout n entier naturel non nul, $a_{n+1} = 2(n+1)\, a_n - n^2\, a_{n-1}$ car $a_n = \mathrm{e}\,.\,P_n(1)$
B) pour tout n entier naturel non nul, $a_{n+1} = 2n\, a_n - n^2\, a_{n-1}$
C) d'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 4 s'écrit $f(x) = \mathrm{e}\,(1+2x+(7x^2/2)+(34x^3/6)+(209x^4/24)+o(x^4))$
D) d'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 4 s'écrit $f(x) = \mathrm{e}\,(1+2x+(7x^2/2)+(34x^3/6)+o(x^4))$

On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par $u_p = \sum_{k=0}^{p} 1/k!$ Pour tout entiers naturels n et p, on pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{p} (n+k)!/(k!)^2$

Question 35: On montre que :

A) $S_p(0) = u_p$ et $S_p(1) = u_p - u_{p+1}$ pour tout p entier naturel
B) $S_p(0) = u_p$ et $S_p(1) = u_p + u_{p-1}$ pour tout p entier naturel non nul
C) les suites de termes généraux $S_p(0)$ et $S_p(1)$ convergent respectivement vers e et 2e car d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction, exponentielle, la suite de terme général u_p converge vers e
D) la suite de terme général $S_p(1)$ diverge

Question 36: Pour tout couple (n,p) d'entiers strictement positifs, on établit que :

A) $S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$
B) $S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_p(n) - S_{p-1}(n)$
C) pour tout entier naturel n, la suite de terme général $S_p(n)$ converge et

$$a_n = \lim_{p\to+\infty} (n!) \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} (1/k!)$$

D) pour tout entier naturel n, la suite de terme général $S_p(n)$ converge et

$$a_n = \lim_{p\to+\infty} (n!) \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k+1}{n} (1/k!)$$