ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ANNÉE 2012**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement (recto),
- 9 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 9

CALCULATRICE NON AUTORISÉE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

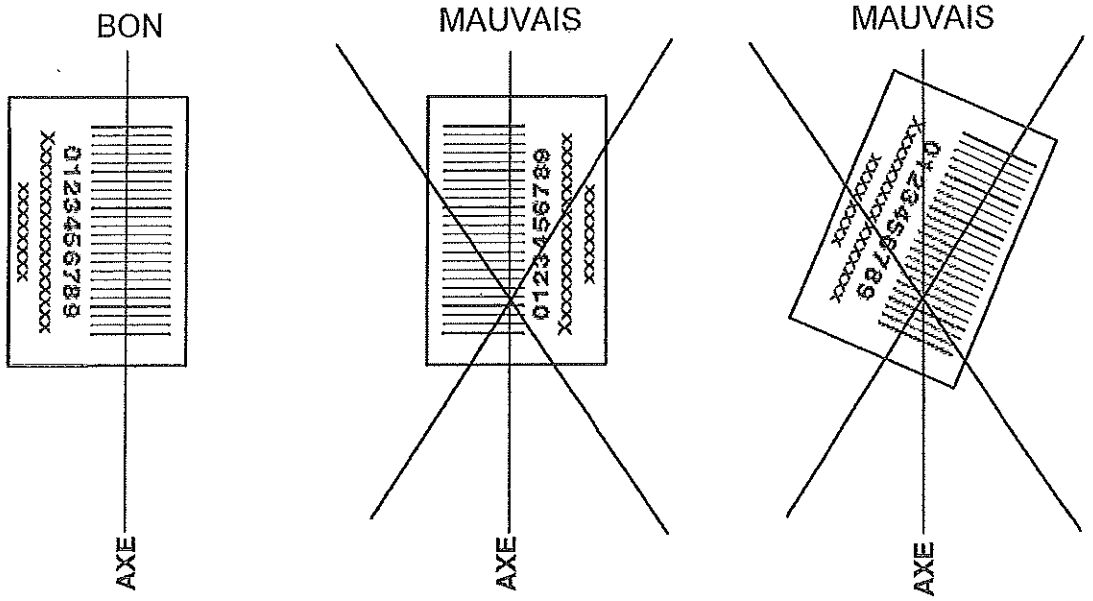
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

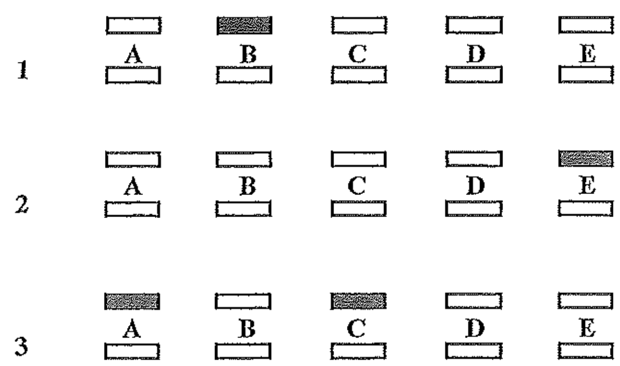
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



RENSEIGNEMENTS

QUESTIONS LIEES
1 à 17
18 à 23
24 à 36

PARTIE I

Dans l'espace vectoriel E des applications de IR dans IR de classe C^{∞} sur IR, on considère l'ensemble F des fonctions de la forme $af_1 + bf_2 + cf_3$ où a, b, c sont des réels et f_1, f_2, f_3 désignent les fonctions définies sur IR par

$f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = e^{-x/2}\sin(x\sqrt{3}/2)$ et $f_3(x) = e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)$

On note D l'application qui à tout élément f de E associe la dérivée f' de f.

On désigne par **o** la loi de composition des applications

Question 1 : L'ensemble F

A) est un sous-espace vectoriel de E
B) n'est pas un espace vectoriel sur IR
C) est un groupe pour la loi de multiplication des fonctions
D) est un sous-anneau de E

Question 2 : L'application D

A) est un endomorphisme de E
B) n'est pas un endomorphisme de E
C) est une application linéaire sur E
D) n'est pas une application linéaire

Question 3 : On note Ker D, le noyau de D, et Im D, l'image de D. On établit que

A) Ker D = E
B) Im D est l'ensemble des fonctions constantes
C) Im D est l'ensemble E privé de la fonction nulle
D) Ker D est réduit à la fonction nulle

Question 4 : L'application D

A) est surjective car Im D = E puisque toute fonction continue admet des primitives
B) est bijective car Im D = E et il y a équivalence entre f bijective et f surjective
C) n'est pas surjective car Ker D n'est pas réduit à la fonction nulle
D) n'est pas injective

Question 5 : a, b, c étant des réels, le développement limité de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 s'écrit

A) $(a + c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + o(t^2)$
B) $(a + c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/4))t^2 + o(t^2)$
C) $(a + c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/4))t^2 + o(t^3)$
D) $(a + c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/2))t^2 + o(t^2)$

Question 6 : La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$

A) est, d'après la question 5, une famille libre de F
B) est, d'après la question 5, une famille liée de F
C) est une base de F
D) ne peut être une base de F

Question 7 : L'application D

A) ne peut induire un endomorphisme sur F car F n'est pas stable par D
B) induit un endomorphisme sur F car F est stable par D
C) a pour matrice dans une base donnée de E, une matrice carrée d'ordre 3
D) ne peut induire un endomorphisme sur F car elle n'est pas linéaire

Question 8 : On note M la matrice, dans $\mathcal{B}$, de la restriction D_F de l'application D sur F, si elle existe. M est

A) une matrice carrée d'ordre 3 symétrique réelle
B) une matrice carrée d'ordre 3 qui n'est ni symétrique ni antisymétrique
C) définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

D) définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 9 : La matrice M

A) n'est pas inversible car son déterminant est nul
B) est inversible et a pour inverse M^2 car $M^3 = I$ où I désigne la matrice unité dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3
C) est inversible car son déterminant est égal à 1
D) est inversible et a pour rang 2

Question 10 : L'application D_F

A) n'est pas bijective
B) est un automorphisme de F
C) ne peut être un automorphisme de F car D n'est pas bijective
D) a pour réciproque l'application $D_F^2 = D_F \circ D_F$

On considère l'application φ qui à deux éléments g et h de F associe le réel
$\varphi(g,h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$ où g' et g'' désignent les dérivées première et seconde de la fonction g et, h' et h'' les dérivées première et seconde de la fonction h.

Question 11 : L'application φ

A) est un produit scalaire sur E
B) n'est pas un produit scalaire sur F car elle n'est pas définie positive
C) est bilinéaire, symétrique, définie positive et F est un espace vectoriel euclidien
D) n'est pas bilinéaire

Question 12 : La famille B définie dans la question 6

A) n'est pas orthogonale pour φ car $\varphi(f_1, f_1) = 3$
B) est orthogonale pour φ car $\varphi(f_1, f_2) = \varphi(f_1, f_3) = \varphi(f_2, f_3) = 0$
C) est une base orthonormée de F muni du produit scalaire φ
D) n'est pas une base orthonormée de F

On considère l'équation différentielle $y''' = y$ que l'on notera (E). Une solution sur IR de (E) est une fonction f, définie et trois fois dérivable sur IR, vérifiant $f'''(x) = f(x)$ pour tout x appartenant à IR. f''' désignant la dérivée d'ordre 3 de la fonction f

Question 13 : Soit f une solution de (E)

A) f est nécessairement de classe C^∞ sur IR

B) f n'est pas nécessairement de classe C^∞ sur IR

C) si f est une fonction polynôme alors elle est nulle car $\deg(f''') \leq \deg(f) - 3$

D) f peut être une fonction polynôme distincte de la fonction nulle

On considère T l'application $D^3 - Id$ où Id désigne l'application identité de E et $D^3 = D \circ D \circ D$. On note Ker T le noyau de l'application T

Question 14 : On montre que

A) Kert T est l'ensemble des solutions polynomiales de (E)

B) Ker T est réduit à la fonction nulle

C) F est inclus dans Ker T

D) Ker T ne contient pas F

Question 15 : Soit f une solution de (E) et g la fonction définie par $g = f'' + f' + f$. On établit que

A) $g = \lambda/f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = -y$

B) $g = \lambda f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = y$

C) $g = \lambda/f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = y$

D) $g = \lambda f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = -y$

Question 16 : On considère (S_k) l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. On montre que

A) les solutions à valeurs complexes de (S_k) sont les fonctions de la forme
$\lambda \exp((1 + i\sqrt{3})t/2) + \mu \exp((1 - i\sqrt{3})t/2)$ où λ et μ sont des complexes arbitraires et exp désigne la fonction exponentielle

B) les solutions à valeurs complexes de (S_k) sont les fonctions de la forme
$\lambda \exp((-1 - i\sqrt{3})t/2) + \mu \exp((-1 + i\sqrt{3})t/2)$ où λ et μ sont des complexes arbitraires et exp désigne la fonction exponentielle

C) l'ensemble des solutions de (S_k) est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est la famille (f_2, f_3)

D) l'ensemble des solutions de (S_k) est un espace vectoriel de dimension 1

Question 17 : On considère (S) l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = \lambda e^t$ où λ est un réel donné et e désigne la fonction exponentielle. On montre que

A) les solutions de (S) sont les fonctions de la forme
$\lambda\, e^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$ où α et β sont des réels arbitraires

B) les solutions de (S) sont les fonctions de la forme
$(\lambda/2) f_1(t) + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$ où α et β sont des réels arbitraires

C) Ker T et F sont deux ensembles distincts

D) Ker T = F

PARTIE II

Soient a et b deux réels strictement positifs fixés tels que $b \leq a$. On considère les suites (a_n) et (b_n), n entier naturel, définies par les relations

$a_{n+1} = (a_n+b_n)/2$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ pour tout n entier naturel

et $a_0 = a$ et $b_0 = b$

Question 18 : Les suites (a_n) et (b_n) vérifient

A) $0 < b_n \leq a_n$ pour tout n entier naturel

B) $0 < a_n \leq b_n$ pour tout n entier naturel

C) $a_{n+1} - a_n = (b_n - a_n)/2$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n}\,(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})$ pour tout n entier naturel

D) $a_{n+1} - a_n = (a_n - b_n)/2$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})$ pour tout n entier naturel

Question 19 : La suite

A) (a_n) est croissante et majorée par b

B) (a_n) est décroissante et minorée par a

C) (b_n) est décroissante et minorée par a

D) (b_n) est croissante et majorée par b

Question 20 : Les suites (a_n) et (b_n)

A) ne sont pas adjacentes mais elles sont convergentes

B) sont adjacentes

C) ne peuvent être adjacentes car elles ne convergent pas vers la même limite

D) ne sont pas toutes convergentes

Question 21: On établit que, pour tout entier naturel n

A) $(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2/2 \leq a_{n+1}-b_{n+1} \leq (\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}})^2$

B) $(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}})^2/2 \leq b_{n+1}-a_{n+1} \leq (\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2$

C) $(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}})^2 \leq a_{n+1}-b_{n+1} \leq (\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2/2$

D) $(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}})^2 \leq b_{n+1}-a_{n+1} \leq (\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2/2$

Question 22 : On pose, pour tout n entier naturel, $d_n = \sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}$. On montre que, pour tout n entier naturel

A) $(1/2)^n(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \leq d_n$

B) $(1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \leq d_n$

C) $d_n \leq (-1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

D) $d_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

Question 23 : On montre que, pour tout n entier naturel

A) $a_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

B) $b_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

C) $(1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq b_n$

D) $-(1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq b_n$

PARTIE III

On considère l'application f de IR dans IR définie par
$f(t) = \text{Arctan}(t)/t$ pour tout réel t différent de 0 et $f(0) = l$ où l est un réel fixé,
Arctan désignant la fonction circulaire réciproque de la fonction tan.
$| \, |$ désigne la valeur absolue et f' désigne la dérivée de la fonction f

Question 24 : La fonction f

A) est continue sur IR pour tout valeur du réel l
B) est continue sur IR pour $l = 1$ et seulement pour cette valeur de l
C) n'est continue sur IR pour aucun réel l
D) est continue sur IR pour $l = -1$

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que l est un réel tel que la fonction f soit continue en 0, si cela est possible. On note IR^* l'ensemble des nombres réels non nuls.

Question 25 : La fonction f

A) n'est pas dérivable en 0
B) ne peut être dérivable en 0 car elle n'est pas continue en ce point
C) est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + o(t)$
D) est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ car f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + t + o(t)$

Question 26 : La fonction f

A) n'est pas dérivable sur IR
B) est dérivable sur IR
C) a pour dérivée sur IR^* la fonction f' définie par $f'(t) = (1/(t(1+t^2)) + \text{Arctan}(t)/t^2$
D) a pour dérivée sur IR^* la fonction f' définie par $f'(t) = (1/(t(1+t^2)) - \text{Arctan}(t)/t^2$

Question 27 : Soit $\text{I}(t) = \int_0^t w^2/(1+w^2)^2 \, dw$ pour tout t réel non nul. On montre que, pour tout t réel non nul

A) $\text{I}(t) = ((t/(1+t^2)) - \text{Arctan}(t))/2$
B) $\text{I}(t) = -((t/(1+t^2)) + \text{Arctan}(t))/2$
C) $\text{I}(t) = -t^2 f'(t)/2$
D) $\text{I}(t) = t^2 f'(t)/2$

Question 28: On en déduit que la fonction f est

A) croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0]$
B) croissante sur IR
C) décroissante sur IR
D) décroissante sur $[1/2,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty,1/2]$

Question 29: La courbe C_f, représentative de la fonction f dans un repère orthonormé,

A) est symétrique par rapport à l'origine du repère
B) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0
D) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

On considère l'application ϕ de IR dans IR définie par $\phi(x) = (1/x)\int_0^x f(t)dt$ pour tout x appartenant à IR^* et $\phi(0)=1$
ϕ' désigne la dérivée de la fonction ϕ

Question 30: La fonction ϕ

A) n'est pas continue sur IR
B) est continue sur IR car $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = 1$
C) est paire
D) est impaire

Question 31: Les fonctions f et ϕ vérifient, pour tout x appartenant à IR,

A) $\phi(x) \leq f(x) \leq 1$
B) $1 \leq f(x) \leq \phi(x)$
C) $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ car les fonctions f et ϕ sont paires et f est croissante sur $[0,x]$ pour tout x réel strictement positif
D) $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ car les fonctions f et ϕ sont paires et f est croissante sur $[x,0]$ pour tout x réel strictement négatif

Question 32: La fonction ϕ

A) n'est pas dérivable sur IR

B) est dérivable sur IR^* et a pour dérivée $\phi'(x) = (f(x) - \phi(x))/x$

C) est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 1$ car ϕ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + t + o(t)$

D) est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$ car ϕ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + o(t)$

Question 33: On pose $J(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ pour tout x réel supérieur à 1. On montre que

A) $(\pi \ln(x))/2 \leq J(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,+\infty[$

B) $J(x) \leq (\pi \ln(x))/2$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,+\infty[$

C) $\phi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

D) $\phi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Question 34: La courbe C_ϕ, représentative de la fonction ϕ dans un repère orthonormé,

A) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses

B) est symétrique par rapport à l'origine du repère

C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

D) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0

Question 35: On considère la suite (u_n), n entier naturel, définie par $u_{n+1} = \phi(u_n)$ pour tout n entier naturel et u_0 réel fixé. On montre que

A) ϕ est une bijection sur IR

B) ϕ induit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

C) pour tout n entier naturel $|u_n-\alpha| \leq (1/4)^n|u_0-\alpha|$ où α est l'unique solution de l'équation $\phi(x) = x$ sur IR

D) la suite (u_n) converge vers 0

Question 36: On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y' + xy = \mathrm{Arctan}(x)$. L'équation différentielle (E)

A) n'admet pas de solution sur IR

B) admet une solution sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de la forme $\phi(x) + K/x$, où K est une constante réelle arbitraire, mais n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty,0[$

C) admet une infinité de solutions sur IR, de la forme $\phi(x) + K/x$, où K est une constante réelle arbitraire

D) admet la fonction ϕ pour unique solution sur IR