CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2010

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 1 :
On sait que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 9. En particulier, $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif. Donc a) est vrai et c) est faux.
On sait que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif. Donc b) et d) sont faux.

Question 2 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 2 :
a) La multiplication d'une matrice par un réel n'est pas une loi de composition interne et donc a) est faux.

c) et d) $E = \text{Vect}(E_{1,1} + E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{2,3}, E_{3,1} + E_{3,2})$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ce qui équivaut au fait que E est non vide et stable par combinaison linéaire. c) est vrai et d) est faux.

b) $(E_{1,1} + E_{2,2})(E_{1,3} + E_{2,3}) = E_{1,3} + E_{2,3}$ et $(E_{1,3} + E_{2,3})(E_{1,1} + E_{2,2}) = 0 \neq E_{1,3} + E_{2,3}$. Donc, si $\times$ est interne dans E, $\times$ n'est pas commutative dans E. b) est faux.

Question 3 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 3 :
a) et b) Il est clair que F est contenu dans E. Ensuite, $F = \text{Vect}(E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2}, E_{3,1} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,3}, E_{3,3})$ et donc F est un sous-espace vectoriel de E. Donc a) est vrai et b) est faux.

c) et d) Si $(E, +, \times)$ est un anneau, $(E, +, \times)$ n'est pas commutatif et donc c) est faux. Ensuite, au gré des différents programmes officiels, il a été imposé à un sous-anneau de contenir l'élément neutre de la multiplication de l'anneau ou non. Il semblerait qu'en ce moment, ce soit le cas et on parie donc que d) est vrai.

Question 4 :
a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

Explication 4 :

a) $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ et donc a) est faux.

b) Les colonnes C_1 et C_2 de N sont égales. Donc $\text{rg}(N) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_3) \leqslant 2$. b) est vrai.

c) Si $\alpha = \delta = \gamma = \varepsilon = 0$, alors $\text{rg}(N) = 0$ et donc c) est faux.

d) En supprimant des lignes ou des colonnes égales à d'autres lignes ou d'autres colonnes, on obtient

$$\text{rg}(N) = \text{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Si maintenant $\alpha\varepsilon - \gamma\delta = 0$, cette dernière matrice est une matrice carrée de format $(2, 2)$ non inversible et donc de rang inférieur ou égal à 1. Donc d) est vrai.

Question 5 :
a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 5 :

a) D'après la question 4.a), il est possible que $\text{rg}(N) = 2$ et donc que $\dim(\text{Ker}(f_N)) = 1$. Donc a) est faux.

b) Si $\alpha = \delta = \gamma = \varepsilon = 0$, $N = 0$ puis $\dim(\text{Ker}(f_N)) = 3$. Donc b) est faux.

c) Si $\alpha\varepsilon - \gamma\delta \neq 0$, la question 4.d) montre que N est de rang 2 et donc $\dim(\text{Ker}(f_N)) = 1$. c) est faux.

d) Si $\text{Ker}(f_N)$ contient D, il est nécessaire que $\alpha + \alpha + 0 = 0$ et donc $\alpha = 0$. Donc si $\alpha = 1$, $\text{Ker}(f_N)$ ne contient pas D. d) est faux. On note néanmoins que $\text{Ker}(f_N)$ contient toujours $\text{Vect}((1, -1, 0))$.

Question 6 :
a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 6 :

On sait que $\text{Im}(f_N) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $v = e_1 + e_2$ puis $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}v$. Puisque $f(e_1) = f(e_2) = \alpha v + \delta e_3$ et $f(e_3) = \gamma v + \varepsilon e_3$, $\text{Im}(f_N)$ est contenu dans le plan $P = \text{Vect}(v, e_3)$ dont une base orthonormale est $\left(e_3, \dfrac{1}{\sqrt{2}}v\right) = (e_3, u)$. Donc c) est vrai. d) est faux car la base fournie n'est pas orthonormale.
P est bien sûr le plan d'équation $x = y$. Le vecteur $(0, 1, 0)$ n'est pas dans P et puisque $\text{Im}(f) \subset P$, a) et b) sont faux.

Question 7 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 7 : Pour toute matrice N de F, $\mathrm{Im}(f_N)$ est contenue dans le plan $P = \mathrm{Vect}(e_3, v)$ qui est encore le plan d'équation $y = x$. De plus, il existe $N \in F$ tel que $\mathrm{rg}(N) = 2$ et dans ce cas, $\mathrm{Im}(f_N) = P$. Donc il existe un plan et un seul répondant aux contraintes de l'énoncé à savoir le plan P. d) est faux.

Soit $N \in F$. $f_N(e_3) = \gamma v + \varepsilon e_3 \in P$ et $f_N(v) = 2\alpha v + 2\delta e_3 \in P$. Donc P est stable par f_N puis g_N est bien un endomorphisme de P.

$\varphi(aN_1 + bN_2) = g_{aN_1+bN_2} = f_{aN_1+bN_2/P} = (af_{N_1} + bf_{N_2})_{/P} = a\varphi(N_1) + b\varphi(N_2)$. φ est une application linéaire de F vers $L(P)$.
Soit $N \in F$. $\varphi(N) = 0 \Rightarrow g_N = 0 \Rightarrow f_N(v) = f_N(e_3) = 0 \Rightarrow \gamma v + \varepsilon e_3 = 2\alpha v + 2\delta e_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \delta = \gamma = \varepsilon = 0 \Rightarrow N = 0$. Donc φ est injective. a) est vrai et b) est faux.
Puisque P est stable par chaque f_N, $\varphi(N_1N_2) = (f_{N_1N_2})_{/P} = (f_{N_1})_{/P} \circ (f_{N_2})_{/P} = \varphi(N_1) \circ \varphi(N_2)$. c) est vrai.

Question 8 :

a) FAUX
b) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 8 : a) et b) Les coefficients lignes et colonnes 1 et 2 de toute matrice de F sont égaux. Donc a) et b) sont faux.

c) et d) Une base de F est $(E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2}, E_{3,1} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,3}, E_{3,3})$. Donc $\dim(F) = 4 = \dim(L(P)) < +\infty$. Puisque φ est linéaire et injective de F dans $L(P)$, φ est un isomorphisme de F sur $L(P)$. c) est faux et d) est vrai.

Question 9 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 9 :
Soit $N \in F$. Une base orthonormale de P est $\mathscr{B} = (u, e_3)$ où $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. $f_N(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 2(\alpha(e_1 + e_2) + \delta e_3) = 2\alpha u + \sqrt{2}\delta e_3$ et $f_N(e_3) = \sqrt{2}\gamma u + \varepsilon e_3$. La matrice de g_N dans la base orthonormale $\mathscr{B}$ est donc $M = \begin{pmatrix} 2\alpha & \sqrt{2}\gamma \\ \sqrt{2}\delta & \varepsilon \end{pmatrix}$.
Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormale, g_N est une isométrie de P si et seulement si M est une matrice orthogonale ou encore si et seulement si M est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\delta = \gamma = 0$ et $\varepsilon = 1$, alors $M = I_n$ et donc d) est faux. Si $\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, $M = 0$ et donc a) est faux. Enfin,

$$g_N \in O(P) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha^2 + 2\delta^2 = 1 \\ \varepsilon = 2\alpha \\ \sqrt{2}\delta = -\sqrt{2}\gamma \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 4\alpha^2 + 2\delta^2 = 1 \\ \varepsilon = -2\alpha \\ \sqrt{2}\delta = \sqrt{2}\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha^2 + \delta^2 = \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon = 2\alpha \\ \delta = -\gamma \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2\alpha^2 + \delta^2 = \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon = -2\alpha \\ \delta = \gamma \end{array}\right. .$$

Donc b) et c) sont faux.

Question 10 :
a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 10 :
a) Dans ce cas, $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. g_A est donc une isométrie négative de P c'est-à-dire une réflexion. Donc a) est vrai et b) et c) sont faux.
g_N est la réflexion par rapport à la droite d'équation $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = x$ ou encore $y = (\sqrt{2}-1)x$ ou enfin $x = (\sqrt{2}+1)y$.
Cette droite est engendrée par le vecteur de coordonnées $(\sqrt{2}+1, 1)$ et donc d) est faux.

Partie II

Question 11 :
a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 11 :
a) et b) f est de classe C^∞ sur I en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. a) est vrai et b) est faux.

c) et d) Pour $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1+x}{1+x} - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$. Donc c) est vrai et d) est faux.

Question 12 :
a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 12 :
Le signe de f' est celui de $1-\ln(1+x)$. Donc f' est strictement positive sur $]-1, e-1[$ et strictement négative sur $]e-1, +\infty[$ puis f est strictement croissante sur $]-1, e-1]$ et strictement décroissante sur $[e-1, +\infty[$. Par suite, tout est faux.

Question 13 :
a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 13 : On note néanmoins que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc c) est vrai et d) est faux.

$f'(0) = 1$ et donc la tangente à C_f en $(0,0)$ a pour équation $y = x$. a) est faux. Ensuite, pour $x \in I$,

$$f''(x) = -\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{(1+x)^2} + (1-\ln(1+x)) \times \frac{-2}{(1+x)^3} = \frac{2\ln(1+x)-3}{(1+x)^3}.$$

f'' s'annule en changeant de signe en $e^{3/2}-1$ avec $f(e^{3/2}-1)=\dfrac{3/2}{e^{3/2}}=\dfrac{3e^{-3/2}}{2}$. Donc b) est faux.

Question 14 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 14 :

a) Soit $\lambda\geqslant 0$. La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et donc $a_\lambda\geqslant 0$. a) est vrai.

b), c) et d) Si on pose $t=\ln(1+x)$ alors $dt=\dfrac{1}{1+x}\,dx$ puis $f(x)\,dx=t\,dt$. Mais alors $a_\lambda=\displaystyle\int_{\ln(1+0)}^{\ln(1+\lambda)}t\,dt$ et b) est faux puis $a_\lambda=\dfrac{1}{2}\ln^2(1+\lambda)$ et a_λ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$. c) est faux et d) est vrai.

Question 15 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 15 :

a) et b) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J, ne s'annulant pas sur J. Une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|+K$. a) est vrai et b) est faux.

c) et d) Sur I, (H) équivaut à l'équation $y'+\dfrac{1}{1+x}y=0$. Puisque la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ est continue sur I, les solutions de (H) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ est bien sûr une solution non nulle de (H) sur I et donc les solutions de (H) sur I sont les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{K}{1+x}$, $K\in\mathbb{R}$. c) est vrai et d) est faux.

Question 16 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 16 :

a) et b) Soit C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ puis y la fonction qui à x de I associe $\dfrac{C(x)}{1+x}$. Pour $x\in I$, $y'(x)=C'(x)\times\dfrac{1}{1+x}+C(x)\times\dfrac{-1}{(1+x)^2}$. a) et b) sont faux.

Ensuite, $y'(x)+\dfrac{1}{1+x}y(x)=C'(x)\times\dfrac{1}{1+x}+C(x)\times\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{C(x)}{(1+x)^2}=C'(x)\times\dfrac{1}{1+x}$. Puisque d'autre part, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a $C'(x)\times\dfrac{1}{1+x}=y'(x)+\dfrac{1}{1+x}y(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ (et donc c) est faux) puis $C'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ puis $C(x)=\ln(1+x)+k$, où k est une constante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$. Donc d) est faux.

Question 17 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 17 :

k est une fonction constante sur $]-\infty,-1[$ et aussi sur $]-1,+\infty[$ mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En tenant compte de l'ambiguïté de l'énoncé, on parie que b) est vrai et le reste est faux.

Question 18 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 18 :

La méthode de la variation de la constante à fourni une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ à savoir la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln|1+x|}{1+x}$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ s'écrivent donc

$$y(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}+\dfrac{k_1}{1+x}\text{ si } x>-1\\ \dfrac{\ln(-(1+x))}{1+x}+\dfrac{k_2}{1+x}\text{ si } x<-1\end{array}\right.,\ (k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Donc a), b) et c) sont faux (mais il semble que c) soit faux à cause d'une faute de frappe). Enfin, la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ est solution de (E) sur I et s'annule en 0. Puisque les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{(1+x)^2}$ sont continues sur I, on sait qu'une telle solution est unique et d) est vrai.

Question 19 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 19 :

a) $g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$. a) est faux.

b) $h(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$. b) est faux.

c) et d)

$$\begin{aligned}f(x)=g(x)h(x)&=\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right)+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{k}(-1)^{k-p}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\right)x^k+o(x^n)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}\right)x^k+o(x^n).\end{aligned}$$

c) est vrai et d) est faux.

Partie III

Question 20 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 20 :

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \ln\left(1 + \dfrac{1}{p}\right)$. Il est connu que $\forall x > 0$, $\ln(1+x) < x$ (inégalité de convexité). Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_p < \dfrac{1}{p} \leqslant 1$. a), c) et d) sont faux et b) est vrai.

Question 21 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 21 : Pour $k \geqslant 1$, $a_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} > \sum_{k=1}^{p} (\ln(p+1) - \ln p) = \ln(k+1)$ (somme télescopique). Donc b) est faux.

D'autre part, $a_k \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} 1 = k$ et a) est vrai.

Puisque $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \ln(k+1) = +\infty$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geqslant \ln(k+1)$, on a $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty$. d) est vrai et c) est faux.

Question 22 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 22 :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1} = x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} (a_k - a_{k-1}) x^k + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1} \\
&= x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{k-1} x^k + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1} \\
&= x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} a_k x^{k+1} + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^{k+1} \\
&= (1+x) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k = (1+x) S_n^x.
\end{aligned}$$

Donc d) est vrai et le reste est faux.

Question 23 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 23 :

a) et b) Soient $x > -1$ et $n \geqslant 1$.

$$I_n(x) = (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^n + t^{n-1} - t^{n-1}}{1+t}\,dt = (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1} + (-1)^{n-2}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + I_{n-1}(x).$$

Donc b) est faux. Ensuite, $I_1(x) = x + I_0(x) = x - \ln(1+x)$. Or, $P_1(x) = x + a_1x^2 = x + x^2$ et donc a) est faux.

c) et d) $I_n(x) = I_0(x) + \sum_{k=1}^{n}(I_k(x) - I_{k-1}(x)) = -\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = P_n(x) + (-1)^n a_n x^{n+1} - \ln(1+x)$. Donc c) est vrai et d) est faux.

Question 24 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 24 :

Soient $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x \geqslant 0$,

$$|I_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

et si $x \leqslant 0$,

$$|I_n(x)| = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x}\,dt = \frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} t^n\,dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}.$$

Donc d) est vrai. Ensuite, $I_1(x) = x - \ln(1+x)$ et en particulier $\lim_{x \to -1} I_1(x) = +\infty$. Donc a) et c) sont faux. Enfin, $\left|I_1\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} - \ln(1.5) = 0,094\ldots$ et $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{12} = 0,083\ldots < \left|I_1\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. Donc b) est faux.

Question 25 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 25 :

a) et b) Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question 21, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|a_n x^{n+1}\right| \leqslant n|x|^{n+1}$. Comme $|x| < 1$, un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que, pour tout réel α, $n^\alpha x^{n+1}$ tend vers 0. Donc a) est vrai et b) est faux.

c) et d) D'après la question 24, $I_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors, d'après la question 23.c), $P_n(x)$ tend vers $\ln(1+x)$ puis $S_n^x = \dfrac{P_n(x)}{1+x}$ tend vers $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ d'après la question 22.d). c) est vrai et d) est faux.

Partie IV

Question 26 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 26 :

Un polynôme dont a, b et c sont racines est $P = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc = X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$. Donc b) est vrai et le reste est faux

Question 27 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 27 :

• $\sigma_1 = \alpha_1$.

• $\alpha_1^2-\alpha_2 = (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) = 2(ab+ac+bc) = 2\sigma_2$ et donc $\sigma_2 = \dfrac{1}{2}(\alpha_1^2-\alpha_2)$. b) et d) sont faux.

• L'égalité $P(a)+P(b)+P(c) = 0$ fournit $(a^3+b^3+c^3)-\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+\sigma_2(a+b+c)-3\sigma_3 = 0$ et donc $3\sigma_3 = \sigma_2\alpha_1-\sigma_1\alpha_2+\alpha_3$. a) et c) sont faux.
On en déduit encore $\sigma_3 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}(\alpha_1^2-\alpha_2)\alpha_1-\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\right)$.

Question 28 :

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

Explication 28 :

a) et b) Puisque α_1, α_2 et α_3 sont réels, il en est de même de σ_1, σ_2 et σ_3. Donc le polynôme $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ est dans $\mathbb{R}[X]$. a) est faux et b) est vrai,

c) et d) puis c) est vrai et donc d) est faux.

Question 29 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 29 :

Ou bien le polynôme P admet une racine réelle et deux racines non réelles conjuguées, ou bien trois racines réelles. La première situation est impossible car les modules des racines sont deux à deux distincts. Donc a) est vrai et b), c) et d) sont faux.

Partie V

Question 30 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 30 : Il est connu que pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc a) et d) sont vrais et b) et c) sont faux.

On en rappelle une démonstration. f est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ au moins et pour tout réel x de $]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Donc f est constante sur $]-1, 1[$ puis sur $[-1, 1]$ par continuité de f en -1 et 1. On en déduit que pour tout réel x de $[-1, 1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. f est en particulier dérivable sur $[-1, 1]$

Question 31 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 31 : Tout est faux d'après la question précédente.

Question 32 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 32 :

a) La fonction $f_1 : x \mapsto \text{Arcsin}\sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0, 1]$. Donc g_1 est définie et de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $g_1' = f_1$. De même, g_2 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $g_2' = f_2$ où f_2 est la fonction $x \mapsto \text{Arccos}\sqrt{x}$. a) est vrai et d) est faux.

b) Pour $x \in [0, 1]$, $g_1'(x) = \text{Arcsin}\sqrt{x}$ et $g_2'(x) = \text{Arccos}\sqrt{x}$. Puisque $g_1'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$, g_1' n'est pas dérivable en 0 et donc b) est faux.

c) Par contre, $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$ et les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe C^∞ sur $]0, 1[$. Donc g_1' et g_2' sont de classe C^∞ sur $]0, 1[$. Il en est alors de même de g_1 et g_2. c) est vrai.

Question 33 :

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

Explication 33 :

a) Comme g_1 et g_2 ne sont pas de classe C^∞ sur $[0, 1]$, la raison invoquée est insuffisante pour affirmer que h est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. a) est faux.

b) La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$ et la fonction g_1 est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Donc la fonction $x \mapsto g_1(\sin^2 x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $x \mapsto g_2(\cos^2 x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et finalement h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. b) est vrai et d) est faux.

c) La question 36 montre que h est constante sur $\mathbb{R}$ et donc c) est vrai.

Question 34 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 34 : h est paire et π-périodique. Donc tout est faux.

Question 35 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 35 :

Pour tout réel x, $h'(x) = 2\sin x\cos x g_1'(\sin^2 x) - 2\sin x\cos x g_2'(\cos x) = \sin(2x)\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - \sin(2x)\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x})$. Donc a) est vrai.

Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geqslant 0$ puis $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ puis $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) = \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ toujours puisque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De même, si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) = x$ et finalement $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h'(x) = 0$. Donc d) est faux. b) est faux car pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) + \operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) = x + x = 2x \neq 0$. Enfin, $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}\right) = \operatorname{Arcsin} 1 = \dfrac{\pi}{2} \neq -\dfrac{\pi}{2}$.

Question 36 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 36 :

a) Ainsi, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h'(x) = 0$. Donc h est constante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puisque h est paire puis sur $\mathbb{R}$ car h est π-périodique. a) est vrai

b), c) et d) Pour tout réel x, on a alors

$$h(x) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g_1\left(\frac{1}{2}\right) + g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin}\sqrt{t} + \operatorname{Arccos}\sqrt{t})\,dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

d) est vrai car $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}$ et b) et c) sont faux.

