CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES PILOTE DE LIGNE
ANNEE 2008
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Question 1 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 :
A) Pour $\theta = 0$, on obtient $1 = 16 + 5$ ce qui est faux. Donc A) est faux.

B)

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^5) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.\end{aligned}$$

Donc B) est vrai.

C) Pour $\theta = \dfrac{\pi}{10}$, on obtient $16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta = 0$.
$\cos\dfrac{\pi}{10}$ est donc une l'une des racines de $P = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5)$ ou encore de $Q = 16X^4 - 20X^2 + 5$ car $\cos\dfrac{\pi}{10} \neq 0$.

$$16X^4 - 20X^2 + 5 = 16\left(X^2 - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{5}{4} = 16\left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right).$$

Les racines de ce polynôme sont les nombres $\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$. Puisque $\cos\dfrac{\pi}{10} > 0$, $\cos\dfrac{\pi}{10} \in \left\{\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}$. Enfin, $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} = 0,5... < \cos\dfrac{\pi}{6} < \cos\dfrac{\pi}{10}$ et donc $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. La réponse C) est donc vraie.
D) et par suite, la réponse D) est fausse.

Question 2 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 2 :

$$\frac{z' - z_I}{z - z_I} = \frac{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)}{1+i} = \frac{1}{2}((\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1))(1-i) = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}.$$

La similitude considérée est de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Donc B), C) et D) sont faux et A) est vrai

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 3 :

A) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin^2(k\theta)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1-\cos(2k\theta)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1\right)-\frac{0}{2}=\frac{2^n-1}{2}$. La réponse A) est fausse.

B) Pour $\theta\in\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k\theta)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=2^n-1\neq\cos(nK\pi)\left(\frac{\cos(K\pi)}{2}\right)^n$. B) est faux.

C) Si $\theta\in\pi\mathbb{Z}$, θ n'est pas solution d'après B). Or $k=-1$ fournit $\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{k\pi}{n}=0\in\pi\mathbb{Z}$. Donc C) est faux.

D) Pour $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(e^{2i\theta})^k\right)=\mathrm{Re}\left((e^{2i\theta}+1)^n-1\right)=-1+\mathrm{Re}(e^{in\theta}(2\cos\theta)^n)=-1+2^n\cos(n\theta)\cos^n\theta.$$

et donc pour $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k\theta)=0\Leftrightarrow\cos(n\theta)\cos^n\theta=\frac{1}{2^n}.$$

Posons $f(\theta)=\cos(n\theta)\cos^n\theta$. $f(0)=1>\dfrac{1}{2^n}$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)=0<\dfrac{1}{2^n}$. f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que D) est faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 4 :

A) et D) L'équation $\dfrac{z+i}{z-i}=1$ n'a pas de solution ou encore 1 n'a pas d'antécédent par f. A) et D) sont faux.
B) $f(2i)=3\notin U$ et donc B) est faux.

C) $f(1)=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$. Comme $1\in U$, C) est faux.

Question 5 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 5 :

A) z, z^2 et z^5 ne sont pas deux à deux distincts si et seulement si $z^2=z$ ou $z^5=z$ ou $z^5=z^2$ ce qui équivaut à $z\in\{0,1,-1,i,-i,j,j^2\}=D$.

Pour $z \in D$, z, z^2 et z^5 sont alignés et pour $z \notin D$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^5 \text{ alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ z^5 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{z(z-1)} \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow z^3+z^2+z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^3+z^2+z \in \mathbb{R}.$$

Donc A) est faux.

B) Faux pour $z = 0$.

C) H contient bien sûr tous les réels et donc C) est faux.

D) D'après A), en récupérant les cas particuliers, z est solution si et seulement si $z^3+z^2+z \in \mathbb{R}$. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$z^3+z^2+z = (x+iy)^3 + (x+iy)^2 + (x+iy) = (x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x) + i(3x^2y - y^3 + 2xy + y).$$

et donc

$$z \text{ solution} \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 + 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

Ensuite,

$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - y^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ et d'axe parallèle à l'axe des imaginaires. Le moitié de la distance entre les sommets est $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Enfin les asymptotes ont pour coefficients directeurs $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \pm\sqrt{3}$.

Finalement, D) est vrai.

Question 6 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 :
A) Puisque $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \in]0, 1[$, $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. A) est faux.

B) Pour $n \geq 2$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\times\frac{\pi}{2^{n+1}})}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Donc B) est vrai.

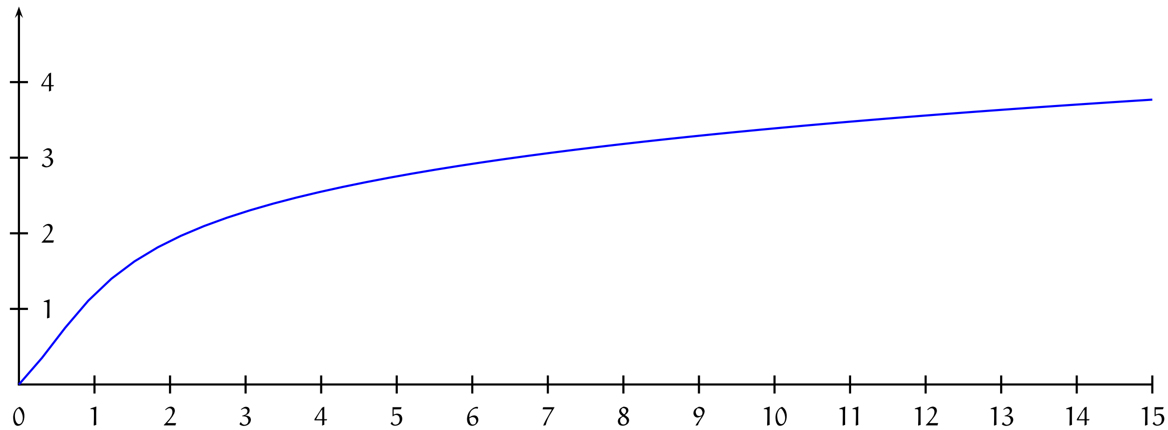
C) et D) Donc, v_n tend vers 0. Puis $v_n = \frac{v_2}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ et donc $u_n = \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}} \sim \frac{1}{2^{n-1}\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi}$. Donc D) est faux et C) également car u_n et v_n n'ont pas mêmes limites.

Question 7 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI ou FAUX
D) FAUX

Explication 7 : Je n'aurais pas choisi cette question parmi les 24 autorisées car il y a des erreurs d'énoncés qu'il serait risqué d'essayer de corriger par soi-même.

A) La machine fournit le graphique suivant :



$f(t) = \ln(1+t) + 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$. f est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Mais quand t tend vers 0,

$$f(t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2 + o(t^2) = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

En particulier, $f''(0) = 1 > 0$ et f « démarre strictement convexe ». A) est faux.

B) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ et donc B) est faux.

C) Ici, il y a trop de possibilités de correction de l'énoncé pour se décider.

D) A coup sûr faux car si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$.

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 8 : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! a_n \in]0, +\infty[/\ f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ à savoir $a_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

A) f^{-1} a le même sens de variations que f et donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. A) est faux.

B) On sait que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier en 0. $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et donc $a_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $f^{-1}(0) = 0$. B) est vrai.

C) Une suite décroissante positive converge mais pas nécessairement vers 0. C) est faux.

Quand t tend vers 0, on a $f(t) \sim t$. Comme a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n} = f(a_n) \sim a_n$. D) est vrai.

Question 9 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 9 :
A) Probablement vrai si l'on ne se soucie pas de l'emploi de la lettre y et si d'autre part on tient compte du fait que « dérivable sur $]y, y+a[$ » ne veut pas dire pas dire « pas dérivable ailleurs ».

B) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour $t \geq A$, on ait $|f(t) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{a}$. Pour $y \geq A$, on a

$$\left|\int_y^{y+a} f(t)\ dt - a\ell\right| = \left|\int_y^{y+a} (f(t) - \ell)\ dt\right| \leq \int_y^{y+a} |f(t) - \ell|\ dt < \int_y^{y+a} \frac{\varepsilon}{a}\ dt = \varepsilon.$$

Donc B) est vrai.

C)

$$\begin{aligned}\int_0^X (f(t+a) - f(t))\ dt &= \int_a^{a+X} f(u)\ du - \int_0^X f(t)\ dt = \int_a^X f(t)\ dt + \int_X^{X+a} f(t)\ dt - \int_0^a f(t)\ dt - \int_a^X f(t)\ dt \\ &= -\int_0^a f(t)\ dt + \int_X^{X+a} f(t)\ dt \longrightarrow -\int_0^a f(t)\ dt + a\ell.\end{aligned}$$

C) est faux

D) $\displaystyle\int_0^X (\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan} t)\ dt \longrightarrow -\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\ dt + 1 \times \frac{\pi}{2}$. Or

$$\int \operatorname{Arctan} t\ dt = t \operatorname{Arctan} t - \int \frac{t}{1+t^2}\ dt = t \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C,$$

et donc $\displaystyle -\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\ dt + 1 \times \frac{\pi}{2} = -(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. D) est faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 10 :
A) Posons $f(x) = e^x$. La formule de Taylor-Mac Laurin fournit un réel $\theta \in]0, 1[$ dépendant de n et de x tel que $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

A) est faux. Notons que la formule de Taylor-Mac Laurin est depuis longtemps hors programme. En maths sup, on ne dispose que de la formule de Taylor-Laplace (« avec reste intégral ») :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

ce qui fournit

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t \ dt.$$

B), C) et D) Cette formule fournit déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a

$$n!\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \int_0^x (x-t)^n e^t \ dt = -\int_x^0 (-(t-x))^n e^t \ dt = (-1)^{n+1}\int_x^0 (t-x)^n e^t \ dt.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et donc positive si n impair et négative si n pair. Donc B) et D) sont vrais et C) est faux.

Question 11 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 :
A) Puisque $a(x) \underset{\alpha}{\sim} b(x)$, il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de α telle que $a(x) = b(x)(1+\epsilon(x))$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} \epsilon(x) = 0$. Mais alors

$$\ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1+\epsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x\to\alpha} \epsilon(x) = 0.$$

A) est vrai.

C) et B) Quand x tend vers 0, $\ln\left(1+\frac{x}{2}+\sin^2 x\right) = \ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right) = \frac{x}{2}+o(x) \sim \frac{x}{2}$ et $\ln(1+x) \sim x$. Donc C) est faux. Pourtant, $1+\frac{x}{2}+\sin^2 x$ et $1+x$ sont des expressions équivalentes en 0 car équivalentes à 1. Donc B) est faux.

D) La raison invoquée est insuffisante : il faut à tout prix éviter que les arguments des logarithmes tendent vers 1. D) est faux.

Question 12 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 :
A) et B) Quand x tend vers 0, $\cos(\alpha x)$ et $\cos(\beta x)$ tendent vers 1 et donc

$$\frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} \sim \frac{\cos(\alpha x)-1}{\cos(\beta x)-1} \sim \frac{-\dfrac{\alpha^2 x^2}{2}}{-\dfrac{\beta^2 x^2}{2}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Donc, A) est faux et B) est vrai.

C) et D) On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$ de sorte que $h = x - \frac{\pi}{6}$ tend vers 0.

$$\begin{aligned}\tan(3x)\ln\left(\tan\frac{3x}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3h}{2}\right)\right) = -\frac{1}{\tan(3h)}\ln\frac{1+\tan\frac{3h}{2}}{1-\tan\frac{3h}{2}}\\ &= -\frac{1}{3h+o(h)}\left(\ln(1+\frac{3h}{2}+o(h)) - \ln(1-\frac{3h}{2}+o(h))\right) = -\frac{3h+o(h)}{3h+o(h)} = -1+o(1)\end{aligned}$$

C) est vrai et D) est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 13 :
A) Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}e^{\frac{x-1}{x^2}} = \exp\left(\frac{x-1}{x^2} - \ln x\right) = \exp\left(\frac{-1+x-x^2\ln x}{x^2}\right).$$

Quand x tend vers 0, $-\frac{-1+x-x^2\ln x}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2} \to -\infty$ et donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to 0$. f est dérivable en 0 et A) est faux.

B) $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) f(x) = \frac{2-x}{x^3}e^{\frac{x-1}{x^2}}$. B) est vrai.

C) La raison invoquée est insuffisante. Il faut constater que f' s'annule en 2 en changeant de signe. C) est faux.

D) Il n'y a pas de rapport entre la raison invoquée et la conclusion (on peut trouver beaucoup de graphes tangents à la première bissectrice et la coupant en 3, 4... points). D) est faux.

Question 14 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 :
A), C) et D) $\sqrt{x(x+2)}$ est bien définie au voisinage de $\pm\infty$ et équivalente à $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$. Le développement proposé est équivalent à x en $\pm\infty$. Ce développement est peut-être le bon en $+\infty$ mais ne peut l'être en $-\infty$. A) est faux. Pour les mêmes raisons C) et D) ont faux.

B) En $+\infty$,

$$e^{1/x}\sqrt{x(x+2)} = e^{1/x}x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2} = x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+2+o(1).$$

Donc B) est vrai.

Question 15 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 :
A) et B) A) et B) sont faux. Un résultat exact sur les sommes de RIEMANN est : si f est une fonction continue sur $[a, b]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

C) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = n\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} = ne^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})}$.
Donc C) est faux.

D) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 \ln(1+t)\ dt = [(t+1)\ln(t+1)-t]_0^1 = 2\ln 2 - 1$ et donc $e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})} \sim e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$ puis

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} \sim \frac{4n}{e}.$$

D) est faux.

Question 16 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 :
A) Faux puisque le programme de maths sup ne permet d'intégrer que des fonctions continues par morceaux sur un segment et pas des fonctions pouvant avoir une infinité de points de discontinuité.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(n) = \int_0^n 3^{-[t]}\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} 3^{-[t]}\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} 3^{-k}\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} = \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}} = 3\frac{1-3^{-n}}{2}.$$

Donc B) est vrai.

C) Vrai car f est croissante sur $[0, +\infty[$ (pour $0 \leq x \leq y$, $f(y) - f(x) = \int_x^y 3^{-[t]}\ dt \geq 0$).

D) et donc D) est faux puisqu'au plus deux réponses sont exactes (la majoration par $\frac{1}{e\ln 3}$ doit être fausse).

Question 17 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 17 :

A) Si g est solution, g' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc g est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus pour $x>0$,

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}g(1/(1/x)) = -\frac{1}{x^2}g(x).$$

Donc A) est faux.

B) h est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = e^t g'(e^t) = e^t g(e^{-t})$ puis $h''(t) = e^t g(e^{-t}) - g'(e^{-t}) = e^t g(e^{-t}) - g(e^t)$ et donc

$$h''(t) - h'(t) + h(t) = e^t g(e^{-t}) - g(e^t) - e^t g(e^{-t}) + g(e^t) = 0.$$

B) est vrai.

C) et D) Les racines de l'équation caractéristique associée à $y'' - y' + y = 0$ sont $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. h est de la forme $t \mapsto e^{t/2}\left[A\cos(\sqrt{3}t/2) + B\sin(\sqrt{3}t/2)\right]$ et donc g est nécessairement de la forme

$$g(x) = e^{(\ln x)/2}\left[A\cos((\sqrt{3}\ln x)/2) + B\sin((\sqrt{3}\ln x)/2)\right] = \sqrt{x}\left[A\cos((\sqrt{3}\ln x)/2) + B\sin((\sqrt{3}\ln x)/2)\right].$$

Donc C) est faux. Réciproquement, $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right) - B\sin\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right)\right]$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[A\cos\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right) + B\sin\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right)\right] + \sqrt{x}\times\frac{\sqrt{3}}{2x}\left[-A\sin\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right) + B\cos\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{A+B\sqrt{3}}{2}\cos\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right) + \frac{-A\sqrt{3}+B}{2}\sin\left((\sqrt{3}\ln x)/2\right)\right]. \end{aligned}$$

Donc g est solution si et seulement si $\frac{A+B\sqrt{3}}{2} = A$ et $\frac{-A\sqrt{3}+B}{2} = -B$ ce qui équivaut à $A = B\sqrt{3}$. Il ne reste plus qu'une lettre variable à savoir B et donc D) est faux

Question 18 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 18 :

A) et B) $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$. Comme $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2c}$, on a donc $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}$.
A) et B) sont faux.

C) Si on suppose juste l'existence de dérivées partielles secondes, il n'y a aucune raison que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Donc C) est faux.

D) $c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 e^x \operatorname{ch}(cy) - e^x c^2 \operatorname{ch}(cy) = 0$. Donc D) est vrai.

Question 19 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 :
A) et B) A) et B) sont faux car on peut avoir $\rho < 0$ ou aussi $\theta \notin [0, 2\pi]$.

C) Faux car $dx\ dy = |\rho| d\rho\ d\theta$.

D) Pour $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $2\sin\theta < 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, \dfrac{\pi}{6}]$ et donc $A_D = \displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_{2\sin\theta}^1 \rho d\rho d\theta$. D) est faux.

Question 20 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 20 :

A) $(-1)\times(x^{n-1}-1)+(x^{n-2})\times x = 1$ et donc $x^{n-1}-1$ et x sont premiers entre eux d'après le théorème de BÉZOUT. A) est vrai.

B) 4 divise $12 = 2\times 6$ mais 4 ne divise pas 2 et 4 ne divise pas 6. Donc B) est faux.

C) et D) 6 divise $2^3 - 2 = 6$ mais $2 \notin 6\mathbb{Z} \cup (1+6\mathbb{Z})$.

Question 21 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 21 :

A) Soit X une partie fixée de E et $k \in [\![0, n]\!]$ son cardinal. Les parties Y telles que $X \cap Y = \varnothing$ sont les parties de $\overline{X}$. Comme le cardinal de $\mathscr{P}(\overline{X})$ est 2^k, il y a 2^k couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$.
Maintenant, il y a $\dbinom{n}{k}$ choix de X et k peut prendre toutes les valeurs de 0 à n. Le nombre cherché est

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

B) $X \cup Y = E \Leftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} = \varnothing$. Comme l'application $X \mapsto \overline{X}$ est une permutation de $\mathscr{P}(E)$ (car est une involution de cet ensemble), il y a autant de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$ que de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$. Donc B) est vrai

C) et D) et par suite C) et D) sont faux puisqu'il y a au plus deux vrais possibles.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 :
A) $X^n + (-X^n) = 0$ n'est pas un polynôme de degré n. L'ensemble des polynômes de degré n n'est pas stable pour l'addition et donc A) est faux.

B) Dans un corps, il y a deux opérations et donc B) est faux.

C) La suite nulle est dans l'ensemble et n'a pas d'inverse pour $\times$ ou aussi le seul élément neutre possible est la suite constante (1) mais cette suite ne tend pas vers 0. C) est faux.

D) $G = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ et en particulier un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$. Mais $(0,1)+G = \{(x,1),\ x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ car par exemple ne contient pas $(0,0)$. D) est faux.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 :

A) et B) $P(a) = 0 \Rightarrow P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$. Mais alors $P((a^2)^2) = P(((a^2)^2)^2) = \ldots = P(a^{2^n}) = 0$. A) est faux et B) est vrai.

C) Un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. La suite (a^{2^n}) ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs. En particulier, il existe $n < m$ tel que $a^{2^n} = a^{2^m}$ ou encore $a^{2^{m-n}} = a$. C) est vrai.

D) D) est faux car 0 peut être racine de P. Par exemple, si $P = X(X-1)$, $P(X^2) = X^2(X^2-1) = X(X+1)X(X-1) = P(X+1)P(X)$.

Question 24 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 24 : (Erreurs d'énoncés probables : il faut certainement supposer $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \in \mathbb{Z}^*$ en D)). Je n'aurais pas choisi cette question dans mes 24, il y a trop de doutes.

A) Si $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ alors $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. On en déduit les égalités

$$a_0 q^n = p(-a_1 q^{n-1} - \ldots - a_n p^{n-1}) \text{ et } a_n p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_0 q^{n-1}).$$

Ainsi, p divise $a_0 q^n$ et est premier à q^n. D'après Gauss, p divise a_0. De même, q divise a_n. Donc si il y a erreur d'énoncé et qu'il faut lire $p \in \mathbb{Z}^*$, alors A) est vrai. Sinon, A) est faux car 0 ne divise pas un entier.

B) p divise 5 et q divise 2. Donc $p \in \{1,-1,5,-5\}$ et $q \in \{1,2\}$ puis $\dfrac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 5, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{5}{2}\}$. B) est (probablement) faux.

C) $\dfrac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 5, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{5}{2}\}$. Seul un nombre strictement négatif peut être racine de P et il ne reste que $\dfrac{p}{q} \in \{-1,-5,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{2}\}$ et on vérifie à la machine qu'aucun de ces nombres ne convient. C) est faux.

D) D) est vrai si on suppose $a_0 \in \mathbb{Z}^*$.

Question 25 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 25 :

A) Faux. Il manque les $(-1)^k$.

B) $\forall\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)=\widetilde{T}_n(\cos\theta)$ et donc $\forall x\in[-1,1],\ T_n(x)=\widetilde{T}_n(x)$. Les polynômes T_n et $\widetilde{T}_n$ coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. B) est vrai.

C) $-X^2T_0+2T_1=-X^2+2X\neq 2X^2-1=T_2$. Donc C) est faux.

D) $\text{dom}(T_2)=2\neq 1$ et donc D) est faux.

Question 26 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 26 :

A) $P'_n=P_{n-1}=P_n-\dfrac{X^n}{n!}$. Une éventuelle racine multiple a de P_n dans $\mathbb{C}$ est aussi racine de P'_n et donc de $\dfrac{X^n}{n!}$. 0 est donc la seule racine multiple de P_n possible. Comme 0 n'est pas racine de P_n, P_n est à racines simples. A) est faux.

B) P_n est une solution de $y-y'=\dfrac{x^n}{n!}$. Les solutions de cette équation sont les $x\mapsto P_n(x)+\lambda e^x$. Une telle fonction est un polynôme si et seulement si $\lambda=0$. Donc B) est vrai.

C) $P(1)=n-(n+2)+(n+2)-n=0$. $P'(1)=n(n+2)-(n+2)(n+1)+n(n+2)=(n-1)(n+2)\neq 0$ pour $n\geq 2$. Donc C) est faux.

D) Posons $m=qn$, $q\in\mathbb{N}^*$.

$$X^m-a^m=(X^n)^q-(a^n)^q=(X^n-a^n)((X^n)^{q-1}+(X^n)^{q-2}(a^n)+\ldots+(X^n)(a^n)^{q-2}+(a^n)^{q-1}).$$

D) est vrai.

Question 27 :
A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 27 : (erreur d'énoncé : 3 réponses vraies).

A) Cette famille est orthogonale pour le produit scalaire $(f,g)\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,dt$ et comme toutes les fonctions sont non nulles, la famille de fonctions est libre.

B) Soient $F=\text{Vect}(1,\cos x,\ldots,\cos(nx))$ et $G=\text{Vect}(1,\cos x,\ldots,\cos^n x)$. F est de dimension $n+1$ et G est de dimension au plus $n+1$.
De plus, $\cos(kx)=T_k(\cos x)\in G$ où T_k est le k-ème polynôme de TCHEBYCHEV. Donc $F\subset G$ puis $\dim(G)=n+1$. On en déduit que $(1,\cos x,\ldots,\cos^n x)$ est libre.

C) et D) On doit donc avoir C) et D) faux ce qui est malheureusement faux pour D). D) est effectivement fausse si on se place sur $]0, +\infty[$. On sait que

$$\forall x > 0,\ 1 \times \operatorname{Arctan} x + 1 \times \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \times 1 = 0,$$

et la famille de fonctions est liée. Mais si on se place sur $\mathbb{R}^*$, la famille est libre. En effet, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires étant supplémentaires

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lambda + \mu \operatorname{Arctan} x + \nu \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = 0 &\Rightarrow \lambda = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mu \operatorname{Arctan} x + \nu \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \text{ et } \mu = \nu = 0 \text{ (en faisant tendre } x \text{ vers } 0 \text{ ou } +\infty).\end{aligned}$$

La famille est donc libre.

Question 28 :

A) VRAI
B) AMUSANT
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 :

A) x et g sont dans $F \cup G$ et donc $x + g$ aussi puisque $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.
Si $x + g \in G$ alors $x = (x + g) + (-g) \in G$ ce qui n'est pas. Donc $x + g \in F$. A) est vrai.

D) Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel. D) est vrai.

B) et C) et donc B) et C) sont faux.

Question 29 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 29 :

A)

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e_i + a) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = -\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) a \in H \cap K = \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ \lambda_i = 0.$$

Ainsi, la famille $(e_1 + a, \dots, e_k + a)$ est libre et donc $\dim(\operatorname{vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)) = k$. A) est faux.

B) On a déjà $\dim(\operatorname{vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)) = k = \dim(E) - \dim(H)$. De plus,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e_i + a) \in H \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in H \Rightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ \lambda_i = 0.$$

Donc, $\operatorname{vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a) \cap H = \{0\}$. B) est vrai.

C) Si $e_1 + a \in K$ alors a est une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$ ce qui impose $a = 0$.
Donc si $a \neq 0$, $K \neq \operatorname{vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)$. C) est faux.

D) $\{0\}$ admet un et un seul supplémentaire à savoir E. Donc D) est faux.

Question 30 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 :

A) On a toujours $\mathrm{ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ ($\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$) et pas toujours $\mathrm{ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$. A) est faux.

B) • Supposons $\mathrm{ker}\ f \oplus \mathrm{Im} f = E$. Soit $x \in E$. Il existe $(y,z) \in E^2$ tel que $x = y + f(z)$ et $f(y) = 0$. Mais alors $f(x) = f(y) + f^2(z) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$ et on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
• Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. Soit $x \in E$. $\exists y \in E/\ f(x) = f^2(y)$ ou encore $f(x - f(y)) = 0$ ou encore $x - f(y) \in \mathrm{ker}(f)$. Mais alors $x = x - f(y) + f(y)$ est somme d'un élément de $\mathrm{ker} f$ et d'un élément de $\mathrm{Im} f$. On a montré que $E = \mathrm{ker} f + \mathrm{Im} f$. D'autre part, par le théorème du rang, on a toujours $\dim(E) = \dim(\mathrm{ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ et finalement $E = \mathrm{ker} f \oplus \mathrm{Im} f$. B) est vrai.

C) Une intersection de sous-espaces n'est jamais vide et donc C) est faux.

D) Soit s une symétrie distincte de l'identité. s est un automorphisme de E et on a donc $\mathrm{ker} s = \{0\}$ et $\mathrm{Im} s = E$ puis $E = \mathrm{ker} s \oplus \mathrm{Im} s$. Mais $s^2 = \mathrm{Id}_E \neq s$. Donc D) est faux.

Question 31 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 31 :

A) Supposons $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ liée. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$.

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$ le plus petit indice k tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$ puis, comme $n - 1 - p \geq 0$,

$$0 = f^{n-1-p}\left(\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^f(x)\right) = \lambda_p f^{n-1}(x)$$

car $\forall k \geq n,\ f^k = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit $\lambda_p = 0$ ce qui est absurde. Donc A) est vrai.

B) Si $g = \mathrm{Id}_E$, alors $\forall p \in \mathbb{N},\ g^p = \mathrm{Id}_E \neq 0$ et $\min\{p \in \mathbb{N},\ g^p = 0\}$ n'existe pas. B) est faux.

C) $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre et de cardinal $n = \dim(E)$. Donc, $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $y = \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{n-2} f^{n-2}(x) + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)$.

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{ker}(f) &\Leftrightarrow f\left(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{n-2} f^{n-2}(x) + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \ldots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0 \Leftrightarrow y \in \mathrm{Vect}(f^{n-1}(x)). \end{aligned}$$

Donc C) est vrai.

D) et par suite D) est faux puisqu'on a déjà deux vrais.

Question 32 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 32 :

A) $\dim(\ker M)$ ne peut dépasser n mais $n^2 - 1 > n$ pour $n \geq 2$. Donc A) est faux.

B) On a $M^2 = nM$ et donc par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $M^p = n^{p-1}M$ (ce qui est faux pour $p = 0$). Donc B) est vrai.

C) Pour $p = 1$, $n^{p-1}2^p M = 2M \neq N$. C) est faux.

D) Pour $p = 1$, $\left[\dfrac{(3n-2)^p}{n} - (-2)^p\right] M = \left(5 - \dfrac{2}{n}\right) \neq N$. D) est faux.

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 :

A) $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ et A) est faux.

B) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg((X - a)^k) = k$ et on sait que B_a est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont fournies par la formule de Taylor. B) est vrai.

C) et D) Les matrices de passage devraient être de format $n + 1$ ce qui n'est pas. C) et D) sont faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 :

A) $(M_n(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe et A) est faux.

B) L'application constante $f : M \to 0$ convient et dans ce cas, $f(I_n) = 0 \neq 1$.
C) La fonction constante $f : M \to 1$ convient et dans ce cas $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ f(M) \neq 0$. C) est faux.
D) Si $f = 0$, toute matrice inversible vérifie $f(A) = 0$. D) est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 35 :

A) $a = 0$ fournit $f_a = \mathrm{Id}_E$ qui est un automorphisme orthogonal. Donc A) est faux.

B) Pour tout x de E,

$$\|f_a(x)\|^2 - \|x\|^2 = 2a < x, u >^2 + a^2 < x, u >^2 \|u\|^2 = (2a + a^2) < x, u >^2.$$

Quand $a = 2$ et $x = u$, on obtient $\|f_2(u)\|^2 - \|u\|^2 = 8 \neq 0$ et donc $f_2 \notin O(E)$. B) est faux.

C) et D) Si $a = -2$ et $x \in u^{\perp}$, on a $f(x) = x$ et si $x \in \text{Vect}(u)$, $f(x) = x - 2 < x, u > u = x - 2x = -x$. Ainsi, f_{-2} coïncide sur deux sous-espaces supplémentaires avec la réflexion par rapport au plan $u^{\perp}$ et est donc cette réflexion. C) est vrai et D) est faux.

Question 36 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 36 :
A) et B) A) et B) sont faux du premier coup d'œil car les matrices des parties linéaires ont dans les deux cas leurs premières et dernières lignes identiques et ne sont donc pas inversibles. Néanmoins, On a l'impression que B) comporte une erreur d'énoncé (deux fois la même idée semble peu probable). Déterminons donc l'expression analytique de la symétrie proposée.

D est la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ où $A(1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$.
Notons s la symétrie considérée et $\overrightarrow{s}$ sa partie linéaire ($\overrightarrow{s}$ est la symétrie orthogonale par rapport Vect($\overrightarrow{u}$)).
On sait que pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) &= 2p_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v} = 2\frac{< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\\ &= 2\frac{x - 2y + z}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2x - 2y + z \\ -2x + y - 2z \\ x - 2y - 2z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}s(M) &= s(A) + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{AM})\\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2(a-1) - 2(b-1) + (c-1) \\ -2(a-1) + (b-1) - 2(c-1) \\ (a-1) - 2(b-1) - 2(c-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6 - 2a - 2b + c}{3} \\ \dfrac{6 - 2a + b - 2c}{3} \\ \dfrac{6 + a - 2b - 2c}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

C) et D) $s(D)$ est la droite passant par $s(O) = (2, 2, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$. Donc C) est faux car $(1, -2, -1)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{k})$. Par contre, la droite proposée en D) passe effectivement par $(2, 2, 2)$ et sa direction d'équations $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ y = z \end{array}\right.$ contient bien le vecteur $(1, -2, -2)$.

