

CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2025

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE 1

Question 1 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 1 : $T_0(-X) = 1 \neq -1 = -T_0(X)$ et $T_1(-X) = -X \neq X = T_1(X)$. Donc, A et B sont faux. $T_1(-X) = -X \neq 1 = T_1'(X)$. Donc, D est faux.

Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -2X \times (-1)^{n+1} T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2} 2X T_{n+1}(X) - (-1)^{n+2} T_n(X) \quad ((-1)^{n+2} = (-1)^n \text{ car } (-1)^2 = 1) \\ &= (-1)^{n+2} (2X T_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(X). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence. T_n a la parité de n . C est vrai.

Question 2 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 2 : $T_0(\sin \theta) = 1 \neq 0 \sin(0 \times \theta)$. Donc, A est faux. $T_0(\sin(0)) = 1 \neq 0 = (\sin(0))^9$. Donc, B est faux.

Pour tout réel θ , $T_2(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) T_1(\cos(\theta)) - T_0(\cos(\theta)) = 2 \cos^2(\theta) - 1$. Mais alors, l'égalité D est fautive pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple. D est faux.

Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que pour tout réel θ , $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Alors, pour tout réel θ (on rappelle que $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$)

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. C est vrai.

Question 3 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 3 : Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n + 1$. Alors,

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n + 2.$$

Le résultat est démontré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$T_n \left(\cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right) = \cos \left(n \times \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = 0.$$

De plus,

$$0 < \frac{(2-1)\pi}{2n} < \frac{(4-1)\pi}{2n} < \dots < \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \frac{2n\pi}{2n} = \pi.$$

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, \pi]$, les n nombres $\cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont deux à deux distincts. Puisque T_n est de degré n , ce sont toutes les racines de T_n , toutes simples. B est vrai et on peut poser

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right).$$

$\cos \left(\frac{(2(n-1)+1)\pi}{2n} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2n} \right) = \cos \left(-\pi + \frac{\pi}{2n} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2n} \right) = \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{2n} \right)$. Dans A, les nombres obtenus pour $k = n-1$ et $k = n$ sont les mêmes. Donc, A est faux puisque T_n est à racines simples.

$\sin \left(\frac{(2 \times 1 - 1)\pi}{2} \right) = 1$ n'est pas racine de T_1 et $\sin \left(\frac{(2 \times 1 + 1)\pi}{2} \right) = -1$ n'est pas racine de T_1 . Donc, C et D sont faux.

Question 4 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 4 : Tout est faux. Par exemple, quand $n = 1$ A et B sont faux et quand $n = 2$, $\alpha_1 \alpha_2 = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}$ puis C et D sont faux.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n = \text{dom}(T_n) \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$. De plus, $\text{dom}(T_1) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$\text{dom}(T_{n+1}) = \text{dom}(2XT_n - T_{n-1}) = 2\text{dom}(T_n).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (-\alpha_k) = (-1)^n 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \alpha_k$ puis

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} T_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Question 5 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel θ ,

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) &= \cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) (i\sin(\theta))^k\right) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) i^{2k} \sin^{2k}(\theta) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k. \end{aligned}$$

Les deux polynômes T_n et $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$ coïncident en une infinité de valeurs de la variable (tout l'intervalle $[-1, 1]$) et sont donc égaux. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k.$$

A est vrai et le reste est faux.

Question 6 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$ de sorte que $\theta \in [0, \pi]$, $x = \cos(\theta)$, $\sin(\theta) \geq 0$ puis $\sin(\theta) = \sqrt{\sin^2(\theta)} = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) = \operatorname{Re}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n \right). \end{aligned}$$

D est vrai et le reste est faux.

PARTIE 2

Question 7 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 7 : C et D sont faux car la somme proposée n'est pas une fonction de k.

$$\text{Soit } n \geq 2. \left(\sum_{k=0}^n X^k \right)' = \sum_{k=1}^n kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k \text{ puis}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k = \left(\frac{X^{n+1} - 1}{X - 1} \right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1} - 1)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, en tenant compte de $\omega^n = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{n\omega^{n+1} - (n+1)\omega^n + 1}{(\omega-1)^2} = \frac{n(\omega-1)}{(\omega-1)^2} = \frac{n}{\omega-1}.$$

B est vrai et le reste est faux.

Question 8 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. $\omega^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right) = 2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ puis

$$|\omega^k - 1| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

car pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi$ puis $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$. Ensuite, en tenant compte de $e^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1$ car $0 < \frac{\pi}{n} \leq \pi < 2\pi$,

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1| = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \left(\frac{1 - \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right)} \right) \\ &= 4 \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right) = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \times \operatorname{Im} \left(ie^{-i\frac{\pi}{2n}} \right) = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}. \end{aligned}$$

Tout est faux.

Question 9 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 9 : $1 \in \mathbb{U}_2$ et $-1 \in \mathbb{U}_2$. Mais $1 - 1 = 0 \notin \mathbb{U}_2$. Donc, A est faux. $-1 \in \mathbb{U}_2$ et $j \in \mathbb{U}_3$ mais $(-1) \times j = -j \notin \mathbb{U}_3$ et $\frac{j}{-1} = -j \notin \mathbb{U}_2$. Donc, B et C sont faux. $\prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = X^n - 1$ et donc D est faux.

Question 10 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 10 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = (3 + 4i)^{n+1} = (3 + 4i)(3 + 4i)^n = (3 + 4i)(x_n + iy_n) = 3x_n - 4y_n + i(4x_n + 3y_n)$$

puis, par identification des parties réelles et imaginaires, $x_{n+1} = 3x_n - 4y_n$ et $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$. A est faux. Puisque $x_1 = 3$ et $y_1 = 4$, C est faux. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \equiv 3 [5]$ et $y_n \equiv 4 [5]$.

- Le résultat est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $x_n \equiv 3 [5]$ et $y_n \equiv 4 [5]$. Alors, modulo 5,

$$x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \equiv 3 \times 3 - 4 \times 4 = -7 \equiv -7 + 10 = 3$$

et

$$y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \equiv 4 \times 3 + 3 \times 4 = 24 \equiv 4.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \equiv 3 [5]$ et $y_n \equiv 4 [5]$. B est vrai. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z^n = \frac{x_n + iy_n}{5^n} = \frac{3 + 5k_n + i(4 + 5k'_n)}{5^n}.$$

$4 \not\equiv 0 [5]$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4 + 5k'_n \not\equiv 0 [5]$ puis $z^n \notin \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n \neq 1$ puis $z \notin \mathbb{U}_n$. D est faux.

Question 11 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) VRAI

Explication 11 : Si les a_p sont tous nuls, alors $P = 0$ puis $M = 0$. A est faux. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \in (n + 1)\mathbb{Z}$, $\omega^p = 1$ puis

$$\sum_{k=0}^n (\omega^k)^p = \sum_{k=0}^n (\omega^p)^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

Donc, B est faux. Si $p \notin (n + 1)\mathbb{Z}$, $\omega^p \neq 1$ puis

$$\sum_{k=0}^n (\omega^p)^k = \frac{1 - (\omega^p)^{n+1}}{1 - \omega^p} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - \omega^p} = 0.$$

Ensuite, $\left| \sum_{k=0}^n P(\omega^k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |P(\omega^k)| \leq \sum_{k=0}^n M = (n + 1)M$. C est vrai. Ensuite,

$$\sum_{k=0}^n P(\omega^k) = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n a_p (\omega^p)^k = \sum_{p=0}^n a_p \left(\sum_{k=0}^n (\omega^p)^k \right) = (n + 1)a_0$$

car, pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p \notin (n + 1)\mathbb{Z}$. Par suite,

$$(n + 1)|a_0| = \left| \sum_{k=0}^n P(\omega^k) \right| \leq (n + 1)M$$

puis $|a_0| \leq M$. D est vrai.

PARTIE 3

Question 12 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 12 : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est strictement positif. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{\sqrt{3} + u_n}{2 + u_n} \times (\sqrt{3} - u_n),$$

et donc $\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(\sqrt{3} - u_n)$. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{3}$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n < \sqrt{3}$. Alors,

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(-\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n} < 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{3}$ puis $u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par $\sqrt{3}$ (et minorée par 1). A et C sont vrais et B et D sont faux. Notons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in]1, \sqrt{3}]$.

Question 13 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3}}{\frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} + \sqrt{3}} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})u_n}{3 + 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})u_n} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} v_n = (7 - 4\sqrt{3}) v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 7 - 4\sqrt{3} \in]0, 1[$. Donc, la suite (v_n) est convergente. A est faux et B est vrai.

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = -\frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3}) = -(2 - \sqrt{3}) \text{ puis, pour } n \in \mathbb{N}, \\ v_n &= -(2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\frac{\ell - \sqrt{3}}{\ell + \sqrt{3}} = 0$ puis $\ell = \sqrt{3}$.

Mais alors, $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{3}}(u_n - \sqrt{3})$ puis $u_n - \sqrt{3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n = -2(2\sqrt{3} - 3)(7 - 4\sqrt{3})^n$.

C et D sont faux.

Question 14 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 14 :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

A est faux et B est vrai. Ensuite, la série de terme général u_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est donc convergente et on sait qu'il en est de même de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. C est vrai et D est donc faux.

Question 15 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 15 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
 J_k &= \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) dt = \frac{1}{2} \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t) dt \\
 &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \left(\left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t) dt \right) \\
 &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k) + f(k+1)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt
 \end{aligned}$$

puis, en sommant, pour k variant de 1 à $n-1$, ≥ 2 donné,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} J_k &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} (f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (f(k) + f(k+1)) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{8} (f'(n) - f'(1)) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \right) + \int_1^n f(t) dt \\
 &= - \sum_{k=1}^n f(k) + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt
 \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 16 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 16 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ puis, en tenant compte de $f''(t) = \frac{2}{t^3} \geq 0$, on a $\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leq \frac{1}{4} f''(t)$. En intégrant, on obtient

$$0 \leq J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) dt \leq \frac{1}{8} \int_k^{k+1} f''(t) dt.$$

En sommant, on obtient

$$0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \sum_{k=n}^p \int_k^{k+1} f''(t) dt = \frac{1}{8} \int_n^{p+1} f''(t) dt = \frac{f'(p+1) - f'(n)}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right).$$

A et donc C sont vrais et B et D sont faux.

Question 17 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 17 : Soit $n \geq 2$. En appliquant la formule de la question 15 à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) = -\frac{f(1) + f(n)}{2} - \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \sum_{k=1}^{n-1} J_k \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{n^2} + 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} J_k \\ &= -\frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty} J_k - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \end{aligned}$$

(la suite u et les suite $(f(n))$ et $(f'(n))$ convergent et donc la série de terme général J_k converge).

Enfin, $0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right)$ fournit quand p tend vers $+\infty$, $0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$ et donc $\frac{1}{8n^2} - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

En posant $\alpha = -\frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty} J_k$, on a

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

B est vrai et le reste est faux.

PARTIE 4

Question 18 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 18 : Puisque la série de terme général u_n converge, on peut poser $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Puisque la suite u est strictement positive, S est un réel strictement positif. Mais alors, $\frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S}$ et $\frac{u_n}{S_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^2}$. On en déduit que les séries de termes généraux respectifs $\frac{u_n}{S_n}$ et $\frac{u_n}{S_n^2}$ sont convergentes. A et C sont vrais et B et D sont faux.

Question 19 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 19 : Puisque la suite u est strictement positive, la suite (S_n) est strictement croissante. Puisque la série de terme général u_n diverge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Si $\frac{S_{n-1}}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$, $\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{S_{n-1}}{S_n} - 1 = \frac{S_{n-1} - S_n}{S_n} = -\frac{u_n}{S_n}$. Donc, A est faux.

Puisque $0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ est de même nature que la série télescopique de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. Or

$$\sum_{k=1}^n (\ln(S_k) - \ln(S_{k-1})) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Donc, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge. B est vrai et C est faux.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 2^n$ de sorte que la série de terme général u_n diverge. On a $S_n = 2^{n+1} - 1$ puis $\frac{S_{n-1}}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \neq 1$. Enfin, $\frac{u_n}{S_n} = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \neq 0$ et la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement. D est faux.

Question 20 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 20 : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) = \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{S_0}$ (car S_n tend vers $+\infty$). Donc, A est vrai et B est faux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}S_n} = \frac{u_n}{S_{n-1}S_n} \geq \frac{u_n}{S_n^2}$ et donc,

$$0 \leq \frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^2}$. C est vrai et D est faux.

Question 21 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 21 : Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{8i} (2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)) \\ &= \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x).\end{aligned}$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 22 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 22 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = 3^n \left(\frac{3}{4} \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3x}{3^n}\right) \right) = \frac{3}{4} \left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - 3^{n-1} \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) \right),$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \left(3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) \right) = \frac{3}{4} \left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \frac{1}{3} \sin(3x) \right).$$

Ensuite, $3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 3^n \left(\frac{x}{3^n} + o\left(\frac{1}{3^n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x + o(1)$ et donc

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \sin(3x) + o(1).$$

La série de terme général u_n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \sin(3x)$. C est vrai et le reste est faux.

Question 23 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 23 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}$. La série de terme général $\frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme e) et donc la série de terme général u_n converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n u_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1 - \cos(2k\theta)}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(e^{2i\theta})^k}{k!} \right) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{(e^{2i\theta})} \right) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{\cos(2\theta)} (\cos(\sin(2\theta)) + i \sin(\sin(2\theta))) \right) \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\cos(2\theta)} \cos(\sin(2\theta)).
\end{aligned}$$

B est vrai et le reste est faux.

PARTIE 5

Question 24 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 24 : $F = \{a(X^4 + X) + bX, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^4 + X, X) = \text{Vect}(X^4 + X - X, X) = \text{Vect}(X, X^4)$. Donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, (X, X^4) est une famille génératrice de F et une famille libre (en tant que sous-famille de la famille libre $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$). Finalement, (X, X^4) est une base de F . A est vrai.

$\text{card}(P_1, \dots, P_n) = n \neq n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Donc, B est faux.

$X^3 \in G \cap \mathbb{K}_3[X]$ et donc $G \cap \mathbb{K}_3[X] \neq \{0\}$. C est faux (mais par contre, $\mathbb{K}[X] = G \oplus \mathbb{K}_2[X]$).

La famille $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$. La matrice de cette famille dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire inférieure, à coefficients diagonaux tous égaux à 1. Cette matrice est de déterminant $1 \neq 0$ et donc D est vrai.

Question 25 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 25 : Soient $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 2)$ et $w = (0, 1, 2)$. Le déterminant de la famille (u, v, w) dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est (en développant suivant la première ligne)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

La famille (u, v, w) est libre puis une base de \mathbb{R}^3 et on sait alors que A est vrai.

B est faux car si $x \in H \setminus \{0\}$ (qui est non vide car $\dim(E) \geq 2$), alors $H \cap \text{Vect}(x) = \text{Vect}(x) \neq \{0\}$.

C est faux car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$.

D est faux car si x et y sont colinéaires et non nuls, $\text{Vect}(x) \cap \text{Vect}(y) = \text{Vect}(x) \neq \{0\}$.

Question 26 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 26 : On note A la matrice de l'énoncé. $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ (les deux colonnes sont non colinéaires). Par suite, $\dim(\text{Im}(f)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. f n'est pas surjective puis A est faux.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \text{rg}(f) = 0$ puis $\text{Ker}(f) = \{0\}$. f est injective puis B est vrai.

D'après le théorème du rang, pour toute $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(g) \geq 3 - 2 = 1 > 0$. Donc, $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ puis g n'est pas injective. C est faux.

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Puisque f est injective, $f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, f(g(f(x))) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow g \circ f = 0$

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Notons $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ (tant pis pour la lettre f) la matrice de g relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

$$g \in \mathcal{H} \Leftrightarrow BA = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2b + 4c & 2a + 4b + 3c \\ d + 2e + 4f & 2d + 4e + 3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$g \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ 2a + 4b + 3c = 0 \\ d + 2e + 4f = 0 \\ 2d + 4e + 3f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ 2(-2b - 4c) + 4b + 3c = 0 \\ d = -2e - 4f \\ 2(-2e - 4f) + 4e + 3f = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \\ f = 0 \\ d = -2e \end{cases}$$

En identifiant applications linéaires et matrices, $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} -2b & b & 0 \\ -2e & e & 0 \end{pmatrix}, (b, e) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(C, D)$ où $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (C, D) est libre et donc \mathcal{H} est vrai.

Question 27 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 27 : Dans le cas d'une application non injective (une projection distincte de Id par exemple), l'égalité $f(x) = 0$ n'entraîne pas $x = 0$. A est faux.

Si f est une projection distincte de l'identité, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \neq \{0\}$. Donc, B est faux.

Si par exemple, f est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 , alors $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1)$ puis $\mathbb{R}^2 \neq \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. C est faux.

f étant l'endomorphisme précédent, $\text{Im}(f^2) = \{0\} \subsetneq \text{Vect}(e_1) = \text{Im}(f)$. D est faux.

Question 28 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 28 : Posons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Alors $MD = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 4c \\ -b & 4d \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ 4b & 4d \end{pmatrix}$ puis

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -a \\ -b = 4b \\ 4c = -c \\ 4d = 4d \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}).$$

Donc, A est faux. Ensuite, si $M^3 - 2M = D$, alors $MD = M^4 - 3M^2 = DM$ puis M est diagonale d'après ci-dessus. Posons alors $M = \text{diag}(\lambda, \mu)$. On a $M^3 - 2M = \text{diag}(\lambda^3 - 2\lambda, \mu^3 - 2\mu)$ puis

$$M^3 - 2M = D \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda = -1 \text{ et } \mu^3 - 2\mu = 4.$$

$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1) = (X - 1)\left(X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ puis l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions deux à deux distinctes dans \mathbb{C} . On a ainsi 3 solutions deux à deux distinctes pour λ .

Soit $P = X^3 - 2X - 4$. Alors $P' = 3X^2 - 2 = 3\left(X - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ensuite, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$P\left(\varepsilon\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon - 4 = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon - 4 \neq 0.$$

P et P' n'ont pas de racine commune dans \mathbb{C} et donc P est à racines simples. De nouveau, on a 3 solutions deux à deux distinctes pour μ et finalement 9 solutions pour le couple (λ, μ) . D est vrai et B et C sont faux.

Question 29 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 29 : Si par exemple, $q = p \neq 0$, alors $(p + q)^2 = (2p)^2 = 4p \neq 2p = p + q$ et $p + q$ n'est pas un projecteur. A est faux. D'autre part, si $q = p$, $\text{Im}(p) = \text{Im}(q) \neq \text{Ker}(q)$. C est faux.

Soit $\alpha = 1 \neq 0$ Alors αp est un projecteur. B est vrai.

Enfin, $(p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p) \Leftrightarrow ((\text{Id} - p) \circ q = 0 \text{ et } (\text{Id} - q) \circ p = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(\text{Id} - p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(\text{Id} - q)) \Leftrightarrow (\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)) \Leftrightarrow \text{Im}(p) = \text{Im}(q)$. D est vrai.

Question 30 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 30 : F est le plan de vecteur normal unitaire $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, (en notant p_n la projection orthogonale sur n)

$$\begin{aligned} p(u) &= (\text{Id} - p_n)(u) = u - \langle u, n \rangle n = (x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (x, y, z) - \frac{1}{3}(x + y + z)(1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z). \end{aligned}$$

Donc, $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est vrai et B est faux.

$d(u, F) = \|u - p(u)\| = \|p_n(u)\| = \|\langle u, n \rangle n\| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2 + 3) = 2\sqrt{3}$. C et D sont faux.

Question 31 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 31 : Si on sait que la matrice d'une projection orthogonale ou d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est toujours symétrique, il est immédiat que A, B et D sont faux.

Dorénavant, on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$. Donc, f est une projection et pas une symétrie. B est faux.

Le noyau de f est la droite d'équations $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} z = 0 \\ y = 2x \end{cases}$. Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est la droite $\text{Vect}(t)$ où $t = (1, 2, 0)$. Le vecteur $u = f(e_1) = e_1 = (1, 0, 0)$ est un vecteur de $\text{Im}(f)$ et d'autre part, $\langle u, t \rangle = 1 \neq 0$. Donc, $\text{Ker}(f)$ n'est pas orthogonal à $\text{Im}(f)$ puis f n'est pas une projection orthogonale. A est faux.

Notons s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Im}(f)$. $\text{rg}(M) = 2$ et donc $\text{Im}(f)$ est un plan. $u = (1, 0, 0)$ et $v = 2f(e_3) = (1, 2, 2)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(f)$ et donc (u, v) est une base de $\text{Im}(f)$. Le vecteur $w = (0, 1, -1)$ est orthogonal à u et v et donc est un vecteur normal à $\text{Im}(f)$ (ou encore $\text{Im}(f)$ est le plan d'équation $y - z = 0$). De plus, (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 car (u, v) est libre et $w \in (u, v)^\perp \setminus \{0\}$.

Notons s' l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } s'(u) = u = s(u).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et donc } s'(v) = v = s(v).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } s'(w) = -w = s(w).$$

Les endomorphismes s et s' coïncident sur une base de \mathbb{R}^3 et donc $s = s'$. Par suite, C est vrai et donc D est faux.

Question 32 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 32 : Si f est un projecteur, l'égalité $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$ fournit $-2f + 2\text{Id}_E = 0$ puis $f = \text{Id}_E$ ce qui n'est pas. Donc, f n'est pas un projecteur et A est faux.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors, $0 = 2x - 3f(x) + f^2(x) = 2x$ puis $x = 0$. Par suite, $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et B est faux.

$$\begin{aligned} f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0 &\Rightarrow (f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0 \Rightarrow \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \\ &\Rightarrow \dim(\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)) \leq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) \Rightarrow n - \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) \leq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) \\ &\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) \geq n. \end{aligned}$$

C est vrai. Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. Alors $f(x) = x = 2x$ puis $2x - x = 0$ puis $x = 0$. Donc, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$. Mais alors,

$$n \geq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) \geq n$$

puis $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) = n$ et donc $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = E$. D est faux.

PARTIE 6

Question 33 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 33 : Les lancers étant bien sûr indépendants, la probabilité de l'événement (PFPF... PF) est $\frac{1}{2^{2n}}$. B est faux. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus en 2n lancers. X suit la loi binomiale de paramètres 2n et $p = \frac{1}{2}$. Donc,

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{2n}{k} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{2n-k}} = \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}}.$$

La probabilité d'obtenir autant de « pile » que de « face » est $\mathbb{P}(X = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$. A est faux.

La probabilité d'obtenir au plus un « pile » est $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{2n}{2^{2n}} = \frac{2n+1}{2^{2n}}$. C est faux.

Le nombre moyen de « pile » est $\mathbb{E}(X) = 2n \times p = n$. D est vrai.

Question 34 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 34 : Notons P l'événement : « obtenir un pile après un lancer de pièce ». Alors, $\mathbb{P}(P) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(\overline{P}) = \frac{2}{3}$. Notons R l'événement : « obtenir une face rouge après un lancer de dé ». Alors, $\mathbb{P}_P(R) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}_P(\overline{R}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_{\overline{P}}(R) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{\overline{P}}(\overline{R}) = \frac{2}{3}$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(R) + \mathbb{P}(\overline{P}) \times \mathbb{P}_{\overline{P}}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Donc, A est faux. Quand on sait que l'on a obtenu « pile » au lancer de pièce, les événements « obtenir rouge au 1er lancer » et « obtenir rouge au deuxième lancer » sont bien sûr indépendants. De même, si on a obtenu « face ». Donc, la probabilité d'obtenir deux faces rouges aux deux premiers lancers est

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

B est vrai. Mais le produit des probabilités d'obtenir rouge aux premiers et deuxième lancers est $\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81} \neq \frac{2}{9}$. Donc les événements « avoir une face rouge au premier lancer » et « avoir une face rouge au deuxième lancer » ne sont pas indépendants. C est faux.

En notant R_n l'événement « obtenir rouge au n-ème lancer », la probabilité demandée est

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3}{\frac{2}{9}} = \frac{10}{81} \times \frac{9}{2} = \frac{5}{9}.$$

D est faux.

Question 35 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 35 : $T(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et donc A est faux. Puisque U_1 et U_2 sont indépendantes,

$\mathbb{P}(T = -1) = \mathbb{P}(\{U_1 = 0\} \cap \{U_2 = 1\}) = (1-p)p$. De même, $\mathbb{P}(T = 1) = p(1-p)$ puis

$\mathbb{P}(T = 0) = 1 - \mathbb{P}(T = -1) - \mathbb{P}(T = 1) = 1 - 2p(1-p) = 2p^2 - 2p + 1$.

De même, $\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(\{U_1 = 0\} \cap \{U_2 = 0\}) = (1-p)^2$, $\mathbb{P}(V = 2) = p^2$ et $\mathbb{P}(V = 1) = 2p(1-p)$. Ensuite, $\mathbb{E}(T) = -\mathbb{P}(T = -1) + \mathbb{P}(T = 1) = 0$ et

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{P}(V = 1) + 2\mathbb{P}(V = 2) = 2p(1-p) + 2p^2 = 2p.$$

T suit une loi uniforme si et seulement si $p(1-p) = \frac{1}{3}$ ou encore $p^2 - p + \frac{1}{3} = 0$. Le discriminant du trinôme $x^2 - x + \frac{1}{3}$ est $\Delta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$. L'équation $x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} et donc B est faux.

$TV = U_1^2 - U_2^2 = U_1 - U_2 = T$ puis $\mathbb{E}(TV) = \mathbb{E}(T) = 0$. Mais alors $\text{cov}(T, V) = \mathbb{E}(TV) - \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(V) = 0 - 0 = 0$. C est vrai et donc, D est nécessairement faux. Vérifions le explicitement.

$$\mathbb{P}(\{T = -1\} \cap \{V = 0\}) = \mathbb{P}(\{U_1 = 0\} \cap \{U_2 = 1\} \cap \{U_1 = 0\} \cap \{U_2 = 0\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(T = -1) \times \mathbb{P}(V = 0),$$

et donc les variables T et V ne sont pas indépendantes, bien que de covariance nulle.

Question 36 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 36 : Si l'urne A récupère une boule, $X_{n+1} - X_n = 1$ et si l'urne A pers une boule, $X_{n+1} - X_n = -1$. A est vrai.

La probabilité de l'événement $\{X_{n+1} - X_n = 1\}$ est la probabilité d'avoir tiré un numéro dans l'urne B à l'étape n à savoir $\frac{b - X_n}{b} = 1 - \frac{X_n}{b}$.

En passant à l'espérance, par linéarité, on a encore $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \frac{1}{b}\mathbb{E}(X_n)$. B est faux. Ensuite,

$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = \frac{X_n}{b}$ puis

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = -\left(\frac{X_n}{b}\right) + \left(1 - \frac{X_n}{b}\right) = 1 - \frac{2X_n}{b}.$$

En prenant l'espérance des deux membres, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{b}\mathbb{E}(X_n)$ puis

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_n) + 1.$$

C est faux.

Soit u la suite définie par : $u_0 = \mathbb{E}(X_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{b}\right)u_n$ (de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{E}(X_n)$). La suite u est une suite arithmético-géométrique. Puisque $b \geq 2$, $0 \leq 1 - \frac{2}{b} < 1$ puis

$$x = \left(1 - \frac{2}{b}\right)x + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{b}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{b}{2}.$$

On sait que la suite $\left(u_n - \frac{b}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 1 - \frac{2}{b} \in [0, 1[$. Donc, la suite $\left(u_n - \frac{b}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{2}$. D est vrai.