F55T

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

On note **C** l'ensemble des nombres complexes, **R** l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geq 2$.

1° Soient $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ des nombres complexes.
On note $V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n telle que, pour (i, j) élément de $\{1, 2, \ldots\ldots, n\}^2$, le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne vaut $a_j^{\,i-1}$ (on rappelle que $a_j^{\,0} = 1$).

Pour $n \geq 3$, montrer que : $V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}) \prod\limits_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)$.

Etablir l'égalité : $V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Les questions 2° et 3° qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

2° On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes en X , à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ des nombres complexes 2 à 2 distincts .
Démontrer que $\left((X + \lambda_0)^n, (X + \lambda_1)^n, \ldots\ldots, (X + \lambda_n)^n\right)$ est une base de E.

3° Soient $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ des nombres réels non nuls, 2 à 2 distincts et $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ des nombres complexes.

On considère l'application g de **R** vers **C** telle que : $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \, e^{i x_k t}$.

a) Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que les n nombres complexes $e^{i\alpha x_1}$, $e^{i\alpha x_2}$, ……, $e^{i\alpha x_n}$ soient 2 à 2 distincts.

Tournez la page S.V.P

b) Pour t réel, on pose : $Y(t)=\begin{pmatrix} g(t) \\ g(t+\alpha) \\ g(t+2\alpha) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(t+(n-1)\alpha) \end{pmatrix}$ et $X(t)=\begin{pmatrix} c_1 e^{ix_1 t} \\ c_2 e^{ix_2 t} \\ c_3 e^{ix_3 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{ix_n t} \end{pmatrix}$

i) Déterminer une matrice carrée A d'ordre n à coefficients complexes telle que : $Y(t)=AX(t)$.

ii) Montrer que la matrice A est inversible.

c) On suppose que g admet une limite L dans **C** quand t tend vers $+\infty$.

i) Démontrer que $X(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.

ii) En déduire que pour k élément de $\{1,2,\ldots\ldots,n\}$, $c_k=0$.

Exercice 2

R est le corps des nombres réels, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le **R**-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans **R**, $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de E et I_n la matrice unité de E. Pour M élément de E, ${}^tM$ et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M.
Pour (i,j) élément de $\{1,2,\ldots\ldots,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.

Soient A et B deux éléments fixés de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M\in \mathrm{E} \quad , \quad f(M)=AMB.$$

1° Soit C un élément de E. Calculer CE_{ij} et $E_{ij}C$.
On suppose que pour tout M élément de E , $CM=MC$. Prouver qu'il existe a dans **R** tel que : $C=aI_n$.

2° Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M|N\rangle = tr\left({}^tM\,N\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

3° On note f^* l'endomorphisme adjoint de f. Montrer que :

$$\forall M\in \mathrm{E} \ , \ f^*(M)={}^tAM\,{}^tB.$$

4° Dans cette question on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit un endomorphisme orthogonal de E.

a) On suppose que f est un endomorphisme orthogonal de E.

i) Prouver que les matrices ${}^tAA$ et $B\,{}^tB$ sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.

ii) Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que ${}^tAA = aI_n$.

b) Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal de E si et seulement s'il existe un réel λ strictement positif et deux matrices Ω_1 et Ω_2 appartenant à $O_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $A = \lambda\Omega_1$ et $B = \dfrac{1}{\lambda}\Omega_2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, **R** est l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel.

1° Soit Γ la fonction numérique de la variable réelle suivante : $x \to \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de Γ est $]0,+\infty[$.

On rappelle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Dans la suite de la question 1°, x désigne un réel strictement positif.

b) Pour $n \geq 1$, on considère l'application f_n de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } 0 < t \leq n \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \text{ si } t > n \ .$$

i) Etablir, pour tout réel u, l'inégalité : $1 + u \leq e^u$.

ii) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \Gamma(x)$.

c) On pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, t^{x-1}\, dt$.

Prouver que pour $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = n^x I_n(x)$ et $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\, I_{n-1}(x+1)$.

d) En déduire : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$.

2° Soit p un entier naturel non nul et $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^p)^n\, dt$.

a) Prouver que pour $n \geq 1$, on a : $a_n = np(a_{n-1} - a_n)$.

b) En déduire une expression de a_n en fonction de n et de p ne comportant pas de signe d'intégrale.

c) Etablir l'équivalence : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma\left(1/p\right)}{p n^{1/p}}$.

d) Soit c un élément de $]0,1[$ .On pose : $a_n(c) = \int_0^c (1-t^p)^n \, dt$.

Prouver que : $a_n - a_n(c) \le (1-c^p)^n$. En déduire l'équivalence : $a_n(c) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

3° Soit g une application de $[0,1]$ vers $[0,1]$ continue, décroissante telle que :

$$g(t) = 1 - \lambda t^p + t^p \varepsilon(t)$$

où p est un entier naturel non nul, λ un élément de $]0,+\infty[$ et où $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

On pose : $u_n = \int_0^1 (g(t))^n \, dt$.

a) Soit λ_1 , λ_2 deux réels tels que : $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

i) Justifier l'existence d'un réel c élément de $]0,1[$ vérifiant :

$$\forall t \in [0,c],\ 0 \le 1-\lambda_2 c^p \le 1-\lambda_2 t^p \le g(t) \le 1-\lambda_1 t^p \quad .$$

ii) En déduire que : $\int_0^c (1-\lambda_2 t^p)^n \, dt \le u_n \le (g(c))^n + \int_0^c (1-\lambda_1 t^p)^n \, dt$.

iii) Prouver que : $\dfrac{1}{\lambda_2^{1/p}} a_n\left(c\lambda_2^{1/p}\right) \le u_n \le (g(c))^n + \dfrac{1}{\lambda_1^{1/p}} a_n\left(c\lambda_1^{1/p}\right)$.

b) Cette question est plus technique et pourra être admise afin d'aborder directement la question 4°.

Etablir l'équivalence : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma\left(1/p\right)}{p(n\lambda)^{1/p}}$

4° Pour $n \ge 1$, on considère : $v_n = \int_0^1 \left(\dfrac{t}{sht}\right)^n dt$.

a) Justifier l'existence de v_n.

b) Déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.