S20B

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$, de dimension n, muni de sa base canonique orthonormale $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$(x \mid y) = {}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et y lorsqu'ils sont représentés dans la base B par les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Sa norme associée sera notée $\| \quad \|$.

L'endomorphisme identité de E est noté e et sa matrice dans n'importe quelle base : I_n.

Pour $y \in E$: $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note $\|y\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$.

Enfin, si $f \in L(E)$, $sp(f)$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

Préliminaire.

Soit u un endomorphisme de E et $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base B.

Dans cette partie, U n'est pas inversible.

1. Justifier l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = 0$.

2. Prouver qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|u_{ii}| \|x\|_\infty \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |u_{ij}| |x_j|$.

3. En déduire qu'il existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tel que $|u_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |u_{ij}|$.

4. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Partie 1.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $M = (m_{ij})$ où :

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \forall j \in \{1,...,n\},\quad m_{ij} = \begin{cases} -2 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Le but de cette partie est de calculer les éléments propres de M sans utiliser son polynôme caractéristique.

Question 1.

1.1. Justifier que les valeurs propres de M sont réelles et que la matrice M est diagonalisable sur **R**.

M se décompose sous la forme : $M = -2\, I_n + T$ et g désigne l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{ij})$.

1.2. Prouver l'équivalence : $(\lambda \in sp(f)) \Leftrightarrow (\lambda + 2 \in sp(g))$.

Comparer alors les sous-espaces $Ker(f - \lambda\, e)$ et $Ker(g - (\lambda + 2)\, e)$

Recherche des valeurs propres de T.

Question 2.

Soit μ une valeur propre de T.

2.1. Montrer qu'il existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tel que $|t_{ii} - \mu| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |t_{ij}|$.

2.2. En déduire que $|\mu| \leqslant 2$.

Justifier alors l'existence d'un réel $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $\mu = 2\cos(\alpha)$.

Question 3.

La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0,\pi]$ et une suite complexe $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ x_{k-1} - 2x_k \cos(\alpha) + x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

3.1. A quelle condition le vecteur représenté dans la base B par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de T pour la valeur propre $\mu = 2\cos(\alpha)$?

Dans la suite, cette condition est vérifiée.

3.2. Prouver que $\alpha \in]0,\pi[$.

3.3. Montrer l'existence de deux nombres complexes c_1 et c_2 tels que :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}.$$

(i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$).

3.4. En déduire les valeurs possibles pour α : $\alpha_j = \dfrac{j\pi}{n+1},\ 1 \leqslant j \leqslant n$.

3.5. Déterminer les valeurs propres de T. Donner une base de vecteurs propres de T.

Question 4. : Valeurs propres de M :

Prouver que les valeurs propres de M sont les $\lambda_j = -4\sin^2\left(\dfrac{j\pi}{2(n+1)}\right),\ 1 \leqslant j \leqslant n$ et que les sous-espaces propres associés E_{λ_j} sont de dimension 1.

Donner une base de chaque E_{λ_j}.

Partie 2.

Pour tout réel r strictement positif, on considère les deux matrices :

$H = 2I_n - rM$ et $K = 2I_n + rM$ où M désigne la matrice définie à la partie **1**

Question 1. : Quelques propriétés de la matrice H.

1.1. Déterminer les éléments propres de H.

1.2. Montrer que H est inversible.

Question 2.

Soit w l'endomorphisme de E représenté dans le base B par la matrice $W = H^{-1} K$

2.1. Déterminer les éléments propres de w.

Question 3.

Soit $S \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique, $sp(S) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ son spectre et s l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice S.

3.1. Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de la matrice S, tels que :

$$\forall x \in E, \quad p \|x\|^2 \leqslant (s(x) \mid x) \leqslant q \|x\|^2.$$

3.2. En notant : $N(S) = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|s(x)\|$, prouver que $N(S) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|$.

Question 4.

Vérifier que :

i) W est une matrice symétrique ;

ii) pour tout réel $r > 0$, on a : $N(W) < 1$.

Question 5.

Déterminer la limite de la suite $(W^k)_{k \geqslant 0}$ lorsque $k \to +\infty$.

Fin du sujet.