

## Epreuve de Mathématiques MPI

## Exercice 1

## Questions préliminaires

1. Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $\varphi : t \mapsto t^n$  est deux fois dérivable sur  $]0, 1[$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $\varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2} \geq 0$ . Donc, la fonction  $\varphi$  est convexe sur  $]0, 1[$ .

2. On en déduit que pour tout  $p \geq 2$ , pour tout  $(t_1, \dots, t_p) \in ]0, 1[^p$  et tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0, 1]^p$  tel que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ ,

$$(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_p t_p)^n \leq \lambda_1 t_1^n + \dots + \lambda_p t_p^n.$$

3.

3.1. Pour tout  $(k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,  $(J^2)_{k, \ell} = \sum_{i=1}^p 1 \times 1 = p$ . et donc  $J^2 = pJ$ . Le polynôme  $X^2 - pX$  est annulateur de  $J$ .

3.2. Les valeurs propres de  $J$  sont racines du polynôme  $X^2 - pX = X(X - p)$  et donc  $\text{Sp}(J) \subset \{0, p\}$  puis  $\text{Sp}(I_p + J) \subset \{1, p+1\}$ .

3.3. La matrice  $I_p + J$  est symétrique réelle et ses valeurs propres sont strictement positives. Donc,  $I_p + J \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ .

★ ★ ★ ★ ★ ★

4. Une expression de l'espérance de  $X$ 

4.1. Soit  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Puisque les  $n$  épreuves sont indépendantes, la probabilité de ne jamais obtenir  $\alpha_j$  en  $n$  épreuves est  $(1 - x_j)^n$ . Par suite,  $X_j$  suit la loi de BERNOULLI de paramètre  $(1 - x_j)^n$ .

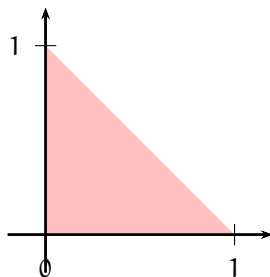
4.2.  $X = \sum_{i=1}^r X_j.$

4.3. Par linéarité de l'espérance,  $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r \mathbb{E}(X_j)$ . Puisque pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $X_j$  suit la loi de BERNOULLI de paramètre  $(1 - x_j)^n$ , on sait que pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}(X_j) = (1 - x_j)^n$ . On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n.$$

5.

5.1. Quand  $r = 3$ ,  $U = \{(x_1, x_2) \in ]0, 1[^2 / x_1 + x_2 < 1\}$ . Voici la représentation graphique de  $U$  dans ce cas (les bords ne sont pas compris).



5.2. On munit  $\mathbb{R}^{r-1}$  de la norme  $\| \cdot \|_1$ . Pour tout  $u = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$ ,

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{r-1} |x_i| = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \leq 1.$$

Donc,  $U$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^{r-1}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ , pour tout  $u = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ , on pose  $\varphi_j(u) = x_j$

et pour tout  $u = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ , on pose  $\psi(u) = \sum_{j=1}^{r-1} x_j$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $\varphi_j$  est continue sur  $\mathbb{R}^{r-1}$

en tant que forme linéaire sur l'espace de dimension finie  $\mathbb{R}^{r-1}$ . De même, la forme linéaire  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}^{r-1}$ . Mais alors, pour tout  $j \in \mathbb{R}^{r-1}$ ,  $\varphi_j^{-1}(]0, +\infty[)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{r-1}$  en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue. De même,  $\psi^{-1}(]-\infty, 1[)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{r-1}$ .

Puisque  $\mathcal{U} = \left( \bigcap_{j=1}^{r-1} \varphi_j(]0, +\infty[) \right) \cap \psi^{-1}(]-\infty, 1[)$ ,  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{r-1}$  en tant qu'intersection finie d'ouverts de  $\mathbb{R}^{r-1}$ .

En résumé,  $\mathcal{U}$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{r-1}$ .

**5.3.** Puisque  $\sum_{j=1}^r x_j = 1$ , on a encore  $\sum_{j=1}^{r-1} x_j = 1 - x_r$ . Par suite,  $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathcal{U}$  et de plus

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left( \sum_{j=1}^{r-1} x_j \right)^n.$$

**5.4.** La fonction  $h$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{U}$  en tant que polynôme à plusieurs variables.

**5.5. Recherche des points critiques de  $h$**

**5.5.1.** Soit  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ . Soit  $\mathbf{m} = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathcal{U}$ .

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{m}) = n \left( -(1 - x_j)^{n-1} + (x_1 + \dots + x_{r-1})^{n-1} \right).$$

**5.5.2.** Si  $\mathbf{m}$  est un point critique de  $h$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $(1 - x_j)^{n-1} = (x_1 + \dots + x_{r-1})^{n-1}$ . On en déduit que  $(1 - x_1)^{n-1} = \dots = (1 - x_{r-1})^{n-1}$  puis que  $1 - x_1 = \dots = 1 - x_{r-1}$  (par injectivité de la fonction  $t \mapsto t^{n-1}$  sur  $]0, +\infty[$ ) et donc que  $x_1 = \dots = x_{r-1}$ .

Réciproquement, si  $x_1 = \dots = x_{r-1}$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{m}) = n \left( -(1 - x_1)^{n-1} + ((r-1)x_1)^{n-1} \right)$$

puis,  $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{m}) = 0 \Leftrightarrow -(1 - x_1)^{n-1} + ((r-1)x_1)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow ((r-1)x_1)^{n-1} = (1 - x_1)^{n-1} \Leftrightarrow (r-1)x_1 = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{r}$ .

La fonction  $h$  admet sur  $\mathcal{U}$  un point critique et un seul, à savoir le point  $\mathbf{b} = \left( \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$ .

**5.6. Conclusion**

**5.6.1.** Pour tout  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(\mathbf{b}) = n(n-1) \left( \left( 1 - \frac{1}{r} \right)^{n-2} + \left( \frac{r-1}{r} \right)^{n-2} \right) = \frac{n(n-1)(r-1)^{n-2}}{r^{n-2}} \times 2$  et pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{b}) = \frac{n(n-1)(r-1)^{n-2}}{r^{n-2}}$ .

Donc,  $H_f(\mathbf{b}) = \frac{n(n-1)(r-1)^{n-2}}{r^{n-2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(r-1)^{n-2}}{r^{n-2}} (I_{r-1} + J_{r-1})$ . D'après la question **3.3.**, la

matrice  $I_{r-1} + J_{r-1}$  est définie positive et il en est de même de la matrice  $H_f(\mathbf{b})$  car  $\frac{n(n-1)(r-1)^{n-2}}{r^{n-2}} > 0$ .

**5.6.2.** Puisque  $h$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}$ , si  $h$  admet un extremum local, c'est en l'unique point critique de  $h$  à savoir  $\mathbf{b}$ . De plus,  $H_f(\mathbf{b})$  est définie positive et on sait alors que la fonction  $h$  admet un minimum local en  $\mathbf{b}$ . En tenant

compte de  $x_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} x_j = 1 - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r}$ , on a montré que  $\mathbb{E}(X)$  admet un minimum local pour  $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$  et

uniquement pour  $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$ .

**5.6.3.** Si  $\mathbb{E}(X)$  admet un minimum global, ce minimum est en particulier un minimum local et est donc nécessairement atteint en  $(x_1, \dots, x_r) = \left( \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$ .

Réciproquement, pour tout  $(x_1, \dots, x_r) \in ]0, 1[^r$  tel que  $\sum_{j=1}^r x_j = 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n = r \left( \sum_{j=1}^r \frac{1}{r} \varphi(1 - x_j) \right) \\ &\geq r \varphi \left( \sum_{j=1}^r \frac{1}{r} (1 - x_j) \right) \quad (\text{d'après l'inégalité de JENSEN}) \\ &= r \left( \frac{1}{r} \left( r - \sum_{j=1}^r x_j \right) \right)^n = \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}} = h(b)\end{aligned}$$

car  $h(b) = (r-1) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \left(\frac{r-1}{r}\right)^n = r \left(\frac{r-1}{r}\right)^n = \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}}$ .  $\mathbb{E}(X)$  est donc minimale pour  $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$ .

On a montré que  $\mathbb{E}(X)$  est minimale si et seulement si  $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$ .

## Exercice 2

### Question de cours

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La série de terme général  $\frac{1}{n^x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , converge si et seulement si  $x > 1$ .
2. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . La série de terme général  $t^n$  converge si et seulement si  $t \in ]-1, 1[$ . De plus, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

★ ★ ★ ★ ★ ★

3. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .  $\frac{1}{x}$  existe dans  $\mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}$  existe dans  $\mathbb{R}$ . Ensuite,

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge (série de RIEMANN d'exposant  $\alpha = 2 > 1$ ). On en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}$  converge. Par suite,  $E_1(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

On a montré que la fonction  $E_1$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

4. Soit  $k \geq 2$ . Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{(x-n)^k}$  et  $\frac{1}{(x+n)^k}$  existent dans  $\mathbb{R}$ .

4.1.  $\frac{1}{(x-n)^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^k}\right)$  et  $\frac{1}{(x+n)^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^k}\right)$  avec  $k > 1$ . Donc, les séries de termes généraux respectifs  $\frac{1}{(x-n)^k}$  et  $\frac{1}{(x+n)^k}$  convergent.

4.2. Puisque les séries de termes généraux respectifs  $\frac{1}{(x-n)^k}$  et  $\frac{1}{(x+n)^k}$  convergent, la série de terme général  $\frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k}$  converge. On en déduit l'existence de  $E_k(x)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On a montré que la fonction  $E_k$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

5. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

5.1.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  est invariant par l'application  $x \mapsto x + 1$ . Ensuite, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $E_k(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^k} \right)$  puis

$$\begin{aligned} E_k(x+1) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+1+n)^k} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{p=-(N-1)}^{N+1} \frac{1}{(x+p)^k} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{p=-N}^N \frac{1}{(x+p)^k} - \frac{1}{(x-N)^k} + \frac{1}{(x+N+1)^k} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{p=-N}^N \frac{1}{(x+p)^k} \right) \\ &= E_k(x). \end{aligned}$$

On a montré que la fonction  $E_k$  est 1-périodique.

5.2.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  est symétrique par rapport à 0. Ensuite, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} E_k(-x) &= \frac{1}{(-x)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(-x-n)^k} + \frac{1}{(-x+n)^k} \right) = \frac{(-1)^k}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^k}{(x+n)^k} + \frac{(-1)^k}{(x-n)^k} \right) \\ &= (-1)^k \left( \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k} \right) \right) = (-1)^k E_k(x). \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $E_k$  a la parité de  $k$ .

## 6. Une relation de récurrence

6.1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que la fonction  $E_k$  est dérivable sur  $]0, 1[$ .

Posons pour  $n \geq 2$  et  $x \in ]0, 1[$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k}$  et pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k} \right)$ .

- La série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $]0, 1[$  vers la fonction  $f$ .
- Chaque fonction  $f_n$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'_n(x) = -k \left( \frac{1}{(x-n)^{k+1}} + \frac{1}{(x+n)^{k+1}} \right)$ .
- Pour tout  $n \geq 2$  et  $x \in ]0, 1[$ ,  $|x-n| = n-x \geq n-1$  et  $|x+n| = x+n \geq n \geq n-1$  puis  $|x-n|^{k+1} \geq (n-1)^{k+1}$  et  $|x+n|^{k+1} \geq (n-1)^{k+1}$  puis  $|f'_n(x)| \leq k \left( \frac{1}{|x-n|^{k+1}} + \frac{1}{|x+n|^{k+1}} \right) \leq \frac{2k}{(n-1)^{k+1}}$  (car  $n-1 > 0$ ). On en déduit encore que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|f'_n\|_\infty \leq \frac{2k}{(n-1)^{k+1}}$ . Puisque  $k+1 \geq 2 > 1$ , la série numérique de terme général  $\frac{2k}{(n-1)^{k+1}}$ ,  $n \geq 2$ , converge. Par suite, la série de fonctions de terme général  $f'_n$ ,  $n \geq 2$  converge normalement et en particulier uniformément sur  $]0, 1[$ .

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Mais alors, la fonction  $E_k : x \mapsto \frac{1}{x^k} + \frac{1}{(x-1)^k} + \frac{1}{(x+1)^k} + f(x)$  est dérivable sur  $]0, 1[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $]0, 1[$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$E'_k(x) = \frac{-k}{x^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-k}{(x-n)^k} + \frac{-k}{(x+n)^k} \right) = -kE_{k+1}(x).$$

Enfin, par 1-périodicité, la fonction  $E_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $E'_k(x) = -kE_{k+1}(x)$ .

6.2. Montrons par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_k$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

- Le résultat est vrai pour  $p = 1$  d'après la question précédente.
- Soit  $p \geq 1$ . Supposons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $E_k$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . La fonction  $E_k$  est déjà dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $E'_k = -kE_{k+1}$ . Par hypothèse de récurrence, la fonction  $E_{k+1}$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Il en est de même de la fonction  $E'_k$  ou encore la fonction  $E_k$  est  $(p+1)$  fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

On a montré par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $E_k$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

En particulier, la fonction  $E_1$  est classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  Montrons alors par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

• Le résultat est vrai quand  $k = 1$ .

• Soit  $k \geq 1$ . Supposons que  $E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$ . Alors,

$$E_{k+1} = -\frac{1}{k} E'_k = -\frac{1}{k} \times \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} E_1^{(k)}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

**7.** Soient  $x \in ]-1, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,  $\left| \frac{x}{n} \right| = \frac{|x|}{n} \leq |x| < 1$  puis la série géométrique de terme général  $\frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \left( \frac{x}{n} \right)^k$ ,  $k \geq 0$ , converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{1}{n-x}.$$

**8.** Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{n^2} \left( \frac{x^2}{n^2} \right)^k \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2(k+1)-1}}{n^{2(k+1)}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2x^{2s-1}}{n^{2s}} \right). \end{aligned}$$

**9.** Soit  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ . Pour tout  $(n, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , posons  $u_{n,s} = \frac{1}{n^{2s}} x^{2s-1}$ . On a donc

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{s=1}^{+\infty} u_{n,s} \right).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après la question **7.**,

$$\sum_{s=1}^{+\infty} |u_{n,s}| = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{|x|^{2s-1}}{n^{2s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{n^{2k+2}} = |x| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{(n^2)^{k+1}} = \frac{|x|}{n^2 - x^2} < +\infty$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{s=1}^{+\infty} |u_{n,s}| \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2 - x^2} < +\infty$$

car  $\frac{|x|}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . La famille  $(u_{n,s})_{(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est donc sommable et on peut écrire

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,s} \right) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right) x^{2s-1} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}.$$

**10.** La formule proposée est celle de la question **9.** quand  $k = 1$ . Soit  $k \geq 2$ . Pour tout  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} E_k(x) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} - 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left( \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1} \right)^{(k-1)}(x) \\ &= \frac{1}{x^k} - 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left( \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1} \right)^{(k-1)}(x). \end{aligned}$$

Soit alors  $\alpha$  la suite définie par : pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_{2s-1} = \zeta(2s)$  et pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{2s} = 0$ . D'après la question précédente,  $R_\alpha \geq 1$ . Ensuite, la somme d'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, Donc, pour tout  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned}
E_k(x) &= \frac{1}{x^k} - 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{s \geq \frac{k}{2}}^{+\infty} \zeta(2s) \frac{(2s-1)!}{(2s-1-(k-1))!} x^{2s-1-(k-1)} \\
&= \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k}.
\end{aligned}$$

### Exercice 3

#### 1. Etude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**1.1.** Puisque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la matrice  $M$  est symétrique réelle. Donc, la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'après le théorème spectral.

**1.2.** On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $M$ . Puisque  $C_2, \dots, C_{n-1}$ , sont colinéaires à  $C_1$  (pour tout  $j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $C_j = \frac{a_j}{a_1} C_1$ ),  $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \text{rg}(C_1, C_n) \leq 2$ . D'autre part,  $\begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & a_n \end{vmatrix} = -a_1^2 \neq 0$  et donc  $\text{rg}(M) \geq 2$ . Finalement,  $\text{rg}(M) = 2$ .

**1.3.** D'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(M)) = n - \text{rg}(M) = n - 2 > 0$  (car  $n \geq 3$ ). Donc, 0 est valeur propre de  $M$ . De plus, puisque  $M$  est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de 0 est exactement la dimension du sous-espace propre associé à savoir  $n - 2$ .

**1.4.** D'après le théorème spectral, les valeurs propres de  $M$  sont réelles. Exactement  $n - 2$  des  $n$  valeurs propres de  $M$  sont égales à 0.  $M$  admet donc deux valeurs propres réelles non nulles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

**1.5.** Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}
X \in E_0(M) &\Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_n = 0 \\ a_2 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = 0 \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 0 \text{ (car } a_1 \neq 0) \\ a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_1} x_{n-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par suite,  $E_0(M) = \left\{ \left( -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_1} x_{n-1}, x_2, \dots, x_{n-1}, 0 \right), (x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \right\} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$  où, pour tout  $j \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ ,  $e_j = (-a_{j+1}, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0)$ . De plus,  $\dim(E_0(M)) = n - 2 = \text{card}(e_j)_{1 \leq j \leq n-2}$  et donc

$(e_j)_{1 \leq j \leq n-2}$  est une base de  $E_0(M)$ .

**1.6.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ .

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{a_2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\lambda} x_n \\ \left( \frac{a_1^2}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda \right) x_n = 0 \end{cases}$$

Si  $x_n = 0$ , alors,  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$  puis  $X = 0$  ce qui est faux. Donc,  $x_n \neq 0$  puis  $\frac{a_1^2}{\lambda} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda = 0$ . Mais alors  $\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$ . On pose donc  $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( a_n - \sqrt{a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2} \right)$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( a_n + \sqrt{a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2} \right)$ .

**1.7.** Puisque  $a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont distincts. Pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\lambda_i^2 - a_n \lambda_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$  puis, d'après la question

précédente,  $MX = \lambda_i X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{\lambda_i} x_n \\ x_2 = \frac{a_2}{\lambda_i} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\lambda_i} x_n \end{cases}$ . Donc,  $E_{\lambda_1}(M) = \text{Vect}(e_{n-1})$  où  $e_{n-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$  et  $E_{\lambda_2}(M) = \text{Vect}(e_n)$

où  $e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

**1.8.** D'après ce qui précède  $M = PDP^{-1}$  où  $D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$  et  $P = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & a_1 & a_1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & a_2 & a_2 \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

## 2. Etude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**2.1.** On a toujours  $\text{rg}(M) = 2$  puis 0 est valeur propre d'ordre au moins égal à  $n - 2$ . D'autre part, si  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda$  est

valeur propre de  $M$  si et seulement si le système  $\begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{a_2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\lambda} x_n \\ \left( \frac{a_1^2}{\lambda} \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda \right) x_n = 0 \end{cases}$  admet une solution non nulle

ce qui équivaut à  $\frac{a_1^2}{\lambda} \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda = 0$  (si  $\frac{a_1^2}{\lambda} \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda \neq 0$ , alors  $x_n = 0 = x_1 = \dots = x_{n-1}$  et si  $\frac{a_1^2}{\lambda} \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} + a_n - \lambda = 0$ ,  $(a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)$  est une solution non nulle) ou encore,  $\lambda$  est une valeur propre non nulle si et seulement si  $\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$  (\*). De plus, le sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle  $\lambda$  est de dimension 1 (droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)$ ).

**1er cas.** Supposons  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$ . L'égalité (\*) s'écrit  $\lambda^2 - \lambda a_n = 0$  ou encore  $\lambda(\lambda - a_n) = 0$ . Si  $a_n = 0$ , (\*) n'admet pas de solution non nulle. Dans ce cas, 0 est l'unique valeur propre de  $M$  et si  $M$  était diagonalisable,  $M$  serait semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle ce qui est faux (car  $a_1 \neq 0$ ). Donc, si  $a_n = 0$  et  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$ ,  $M$  n'est pas diagonalisable.

Si  $a_n \neq 0$ ,  $M$  admet une unique valeur propre non nulle, à savoir  $a_n$ .  $M$  admet aussi au moins  $n - 2$  fois la valeur propre 0 pour valeur propre. La dernière valeur propre  $\mu$  est fournie par la trace de  $M$  :  $a_n = \text{Tr}(M) = 0 + \dots + 0 + a_n + \mu$  puis  $\mu = 0$ . 0 est alors valeur propre d'ordre  $n - 1$  de  $M$ . Puisque  $\dim(E_0(M)) = n - 2 \neq n - 1$ ,  $M$  n'est pas diagonalisable.

**2ème cas.** Supposons que  $a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$ . Le discriminant de l'équation (\*) est alors nul puis l'équation (\*) admet une solution double à savoir  $\lambda = a_n$ . Comme dans le premier cas, 0 est alors valeur propre d'ordre au moins  $n - 1$  puis  $M$  n'est pas diagonalisable.

**3ème cas.** Supposons que  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \neq 0$  et  $a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \neq 0$ . Dans ce cas, l'équation (\*) admet deux solutions distinctes

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{C}$ . De plus, ces solutions sont non nulles car  $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \neq 0$ . Le spectre de  $M$  est donc  $(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$  avec  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres simples  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont nécessairement des droites vectorielles. D'autre part, la dimension de  $E_0(M)$  est égale à  $n-2$  qui est l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0. Puisque la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée, la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En résumé,  $M$  n'est pas diagonalisable si et seulement si  $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 = 0$  ou  $\alpha_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 = 0$ .

**2.2.** On prend  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = i$  et  $\alpha_3 = 0$ . On a  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$  et donc la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable d'après la question précédente.