Epreuve de Mathématiques PC

Exercice 1

1. Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et annulateur de u. Donc, u est diagonalisable.

2. Les éventuelles valeurs propres de u sont racines de P et sont donc éléments de $\{1, 2\}$. On pose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

3.

3.1. $v - w = (\beta - \alpha)\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$. Par suite, pur tout x de E,

$$x = v(x) - w(x)) = v(x) + w(-x).$$

Ainsi, tout vecteur de E est somme d'un élément de $\mathrm{Im}(v)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(w)$. Ceci montre que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

3.2. $v \circ w = (u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (u - \beta \mathrm{Id}_E) = P(u) = 0$. De même, $w \circ v = 0$.

3.3. Pour tout $x \in E$, $v(w(x)) = 0$ et donc, pour tout $x \in E$, $w(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$. De même, l'égalité $w \circ v = 0$ fournit $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. D'après les deux questions précédentes, $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(w) + \mathrm{Ker}(v)$ puis $E = \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Ker}(w)$.
Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w)$. Alors, $u(x) = x = 2x$ puis $2x - x = 0$ et donc $x = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w) = \{0\}$.
On a montré que

$$E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w).$$

4. Dans une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de u est $D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-k})$ (avec éventuellement $k = 0$ ou $k = n$).

5. Application

5.1. $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis

$$U^2 - 3U + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $U^2 - 3U + 2I_3 = 0_3$ puis $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

5.2. $V = U - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = U - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(U - I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = x \end{array} \right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ où $u_1 = e_1 + e_3$. $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle et une base de cette droite est $\mathscr{B}_1 = (u_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

$$X \in \text{Ker}\,(U - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x - y = 0.$$

Donc, $\text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E)$ est le plan d'équation $x - y = 0$ dans la base $\mathscr{B}$. Une base de $\text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E)$ est $\mathscr{B}_2 = (u_2, u_3)$n où $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_3$.

5.4. Soient $D = \text{diag}(1, 2, 2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D et P sont respectivement une matrice diagonale et une matrice inversible telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Question de cours

1. Soit α un réel non nul.

$$(1-x)^\alpha = (1 + (-x))^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha(-x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(-x)^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Par suite, $1 - (1-x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \alpha x - \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \alpha x + o(x)$ puis

$$1 - (1-x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \text{ (car } \alpha \neq 0).$$

2. Pour tout réel strictement positif a et tout réel b, $a^b = e^{b\ln(a)}$.

3. Soit $n \geqslant 2$ de sorte que $n - 1 \geqslant 1$.

3.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = \sum_{k=1}^{p} (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_p \text{ (somme télescopique)}$$
$$= \left(1 - (1-1)^{n-1}\right) - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{n-1}$$

Ensuite, $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^p}\right)^{n-1} = 1$. Ceci montre que la série de terme général u_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.$$

3.2. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, $a_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{n-1}{2^k}$. La suite $\left(\dfrac{n-1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et la série géométrique de terme général $\dfrac{n-1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série de terme général a_k, $k \in \mathbb{N}$, converge.

4. Etude d'une variable aléatoire

4.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{1}{2^{k-1}} > \dfrac{1}{2^k}$ puis $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{k-1}} < 1 - \dfrac{1}{2^k}$. Puisque $n - 1 > 0$, la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et donc $\left(1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} < \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ puis $1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} > 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ ou encore $a_{k-1} > a_k$ et finalement $u_k > 0$.

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k > 0$.

4.2. $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lambda$. Donc, $\lambda = 1$ puis

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = k) = u_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1}.$$

4.3. Soit $p \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{k=1}^{p} ku_k = \sum_{k=1}^{p} k(a_{k-1} - a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{p} ka_{k-1} - \sum_{k=1}^{p} ka_k = \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_k - \sum_{k=1}^{p} ka_k = a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k - pa_p\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k - pa_p.\end{aligned}$$

Ensuite, $pa_p \underset{p\to+\infty}{\sim} (n-1)\dfrac{p}{2^p}$ puis $\lim\limits_{p\to+\infty} pa_p = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la série de terme général $k\mathbb{P}(X_n = k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la variable aléatoire X_n admet une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S_n.$$

5.

5.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_p est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, $f_p(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} pe^{-t}$ puis $f_p(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. La fonction f_p est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et finalement la fonction f_p est intégrable sur $[0, +\infty[$. En particulier, l'intégrale I_p est une intégrale convergente.

5.2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}I_{p+1} - I_p &= \int_0^{+\infty} \left(\left(1 - e^{-t}\right)^p - \left(1 - e^{-t}\right)^{p+1}\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right)^p \left(1 - \left(1 - e^{-t}\right)\right) dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^p\ dt = \left[\frac{1}{p+1}\left(1 - e^{-t}\right)^{p+1}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{p+1}\left(\lim_{t\to+\infty}\left(1 - e^{-t}\right)^{p+1} - (1-1)^{p+1}\right)\\ &= \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

5.3. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &= \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-2} (I_{p+1} - I_p)\\ &= I_{n-1} - I_0 \text{ (somme télescopique)}\\ &= I_{n-1}.\end{aligned}$$

6. Un encadrement

6.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$ puis la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$. Donc, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. En intégrant, on obtient

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k) \times \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ dt \leqslant (k+1-k) \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

6.2. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$. En additionnant membre à membre, on obtient

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n),$$

et

$$I_{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n-1).$$

Donc, $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit $m \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto 2^{-t}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis la fonction $t \mapsto (1-2^{-t})^{n-1}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et finalement, la fonction g_n est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^m g_n(t)\ dt &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(t)\ dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(k)\ dt = \sum_{k=0}^{m-1} g_n(k) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^m g_n(t)\ dt &= \sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} g_n(t)\ dt \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} g_n(k)\ dt = \sum_{k=1}^{m} a_k.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $m \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\ dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$.

8. Soit $\beta > 0$. En posant $u = v\ln(2)$, on obtient

$$\int_0^\beta g_n(v)\ dv = \int_0^\beta \left(1 - \left(1 - e^{-v\ln(2)}\right)^{n-1}\right) dv = \int_0^{\beta\ln(2)} \left(1 - \left(1 - e^{-u}\right)^{n-1}\right) \frac{du}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)\ du.$$

9. Quand β tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(v)\ dv = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(u)\ du = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}$ (ce qui établit au passage la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(v)\ dv$).

On fait alors tendre m vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question 7 et on obtient d'après la question 4.3,

$$\mathbb{E}(S_n) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leqslant \int_0^{+\infty} g_n(v)\ dv = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \mathbb{E}(S_n).$$

On a montré que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{E}(S_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(S_n)$.

10. Ainsi, pour $n \geqslant 2$, d'après la question 6.2, $\mathbb{E}(S_n) \leqslant 1 + \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant 1 + \dfrac{1 + \ln(n-1)}{\ln(2)}$ et $\mathbb{E}(S_n) \geqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \geqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$. Donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(S_n) \leqslant \frac{\ln(n-1)}{\ln(2)} + 1 + \frac{1}{\ln(2)},$$

puis

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

$$1 \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\mathbb{E}(S_n) \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\left(\frac{\ln(n-1)}{\ln(2)} + 1 + \frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} + \frac{1+\ln(2)}{\ln(n)}.$$

Puisque $\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\mathbb{E}(S_n) = 1$ et donc que

$$\mathbb{E}(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

Exercice 3

1. Etude de l'application φ_u

1.1. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi_u(\lambda x + \mu y) &= 2\frac{\langle \lambda x + \mu y | u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - (\lambda x + \mu y) = \lambda\left(2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x\right) + \mu\left(2\frac{\langle y|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - y\right)\\ &= \lambda\varphi_u(x) + \mu\varphi_u(y).\end{aligned}$$

Donc, φ_u est un endomorphisme de E.

1.2. On note que $\varphi_u(u) = 2\frac{\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - u = 2u - u = u$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi_u \circ \varphi_u(x) &= \varphi_u\left(2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x\right) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}\varphi_u(u) - \varphi_u(x)\\ &= 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - \varphi_u(x)\\ &= x.\end{aligned}$$

Donc, $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, φ_u est une involution et en particulier une bijection de E sur lui-même. Puisque φ_u est linéaire, φ_u est un automorphisme de E. De plus, $\varphi_u^{-1} = \varphi_u$.

1.3. Soit $x \in E$.

$$\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle = \left\langle 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x | 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x\right\rangle = 4\frac{\langle x|u\rangle^2}{\langle u|u\rangle^2}\langle u|u\rangle - 4\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}\langle x|u\rangle + \langle x|x\rangle = \langle x|x\rangle.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $\|\varphi_u(x)\|^2 = \|x\|^2$ puis $\|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.

1.4. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après une identité de polarisation,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\varphi_u(x) + \varphi_u(y)\|^2 - \|\varphi_u(x) - \varphi_u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|\varphi_u(x+y)\|^2 - \|\varphi_u(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \langle x|y\rangle.\end{aligned}$$

Donc, φ_u conserve le produit scalaire.

1.5. On a vu que $\varphi_u(u) = u$. Donc, $\varphi_u(D_u) = \varphi_u(\mathrm{Vect}(u)) = \mathrm{Vect}(\varphi_u(u)) = \mathrm{Vect}(u) = D_u$.

$H_u = (\mathrm{Vect}(u))^\perp = u^\perp$. Mais alors, puisque φ_u conserve le produit scalaire, l'image par φ_u d'un vecteur orthogonal à u est encore un vecteur orthogonal à u. Donc, $\varphi_u(H_u) \subset H_u$.

1.6. Puisque $\varphi_u(u) = u$, plus généralement, pour tout $x \in D_u$, $\varphi_u(x) = x$. D'autre part, si $x \in H_u$, $\langle x|u\rangle = 0$ et donc $\varphi_u(x) = -x$. φ_u coïncide sur les deux sous-espaces supplémentaires D_u et H_u avec la symétrie par rapport à D_u par rapport à $H_u = D_u^\perp$. Donc, φ_u est la symétrie orthogonale par rapport à D_u.

2. Etude d'un exemple dans le cas $n = 3$

2.1. H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et donc $H^\perp$ est une droite vectorielle c'est-à-dire un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Puisque la base canonique est orthonormée, un vecteur normal à H est le vecteur $(1, 1, 1)$. Une base orthonormée de $H^\perp$ est (v) où $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

2.2. On note p_v la projection orthogonale sur $H^\perp$ et p_H la projection orthogonale sur H. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puisque v est unitaire,

$$p_v(u) = \langle v|u\rangle v = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right).$$

La matrice de p_v dans la base canonique est $P_v = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, $p_H = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p_v$ et donc la matrice de p_H dans la base canonique est

$$P_H = I_3 - P_u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3. $\varphi_v = 2p_v - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc la matrice de φ_v dans la base canonique est

$$\Phi_v = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Etude d'une réciproque

3.1. Soit $x \in E$. x s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $(y, z) \in \Delta \times \Delta^\perp$. Mais alors, $\psi(x) = y - z$ puis

$$\psi(\psi(x)) = \psi(y - z) = y + z = x.$$

Donc, $\psi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$. Ensuite, si x' est un vecteur de E que l'on écrit sous la forme $x' = y' + z'$ avec $(y, z) \in \Delta \times \Delta^\perp$,

$$\begin{aligned}\langle \psi(x)|\psi(x')\rangle &= \langle y - z|y' - z'\rangle = \langle y|y'\rangle + \langle z|z'\rangle \text{ (car } \langle y|z'\rangle = \langle y'|z\rangle = 0) \\ &= \langle y + z|y' + z'\rangle = \langle x|x'\rangle.\end{aligned}$$

Donc, ψ conserve le produit scalaire.

3.2. Soit u un vecteur non nul de Δ. On a $\psi(u) = u = \varphi_u(u)$ puis, plus généralement pour tout $x \in \Delta$, $\psi(x) = x = \varphi_u(x)$. Soit $x \in \Delta^\perp$. Alors, $\psi(x) = -x = \varphi_u(x)$. Ainsi, les endomorphismes ψ et φ_u coïncident sur les deux sous-espaces supplémentaires Δ et φ_u et donc $\psi = \varphi_u$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$I_n(-x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)\cos(-tx)\ dt = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)\cos(tx)\ dt = I_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est paire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \left(1 - t^2\right)\cos(tx) \end{array}$ de sorte que, pour tout réel x, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \Phi(x,t)\ dt$.

• Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

• Φ admet sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -t\left(1 - t^2\right)^n \sin(tx).$$

De plus,

- pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$,

- pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = t\left(1-t^2\right)^n |\sin(xt)| \leqslant t\left(1-t^2\right)^n = \varphi(t)$ où de plus la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$I_n'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\ dt = \int_0^1 -t\left(1-t^2\right)^n \sin(xt)\ dt.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} I_n'(x) &= \int_0^1 -t\left(1-t^2\right)^n \sin(tx)\ dt = \left[\frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}\sin(tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1} x\cos(xt)\ dt \\ &= -\frac{x}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\cos(tx)\ dt = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x). \end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

• D'après la question 2, les fonctions I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier continues sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est donc vraie quand $k = 0$.

• Soit $k \geqslant 0$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, la fonction I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$. Par hypothèse de récurrence, la fonction I_{n+1} est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction I_n'. Mais alors, la fonction I_n est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{p+1}(0) &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{p+1}\ dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right)\left(1-t^2\right)^p\ dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^p\ dt - \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^p\ dt \\ &= I_p(0) - \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^p\ dt. \end{aligned}$$

Ensuite, une intégration parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^p\ dt &= \int_0^1 t \times t\left(1-t^2\right)^p\ dt = \left[t \times -\frac{1}{2(p+1)}\left(1-t^2\right)^{p+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2(p+1)}\left(1-t^2\right)^{p+1}\ dt \\ &= \frac{1}{2(p+1)} I_{p+1}(0). \end{aligned}$$

On en déduit que $I_{p+1}(0) = I_p(0) - \dfrac{1}{2p+2} I_{p+1}(0)$ puis que $I_{p+1}(0) = \dfrac{2p+2}{2p+3} I_p(0)$.

5.2. Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en tenant compte de $I_0(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$,

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0(0) = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a aussi

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.

$$I_n(0) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k} \right) dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{I_n(0)}{n!} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

7. Pour tout réel u, $\cos(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout réel $t \in [0,1]$,

$$\left(1-t^2\right)^n \cos(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \left(1-t^2\right)^n x^{2k}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, posons $f_k(t) = (-1)^k \dfrac{t^{2k}}{(2k)!} \left(1-t^2\right)^n x^{2k}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in [0,1]$,

$$|f_k(t)| = \frac{t^{2k}}{(2k)!} \left(1-t^2\right)^n x^{2k} \leqslant \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

puis $\|f_k\|_{\infty,\,[0,1]} \leqslant \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$. La série numérique de terme général $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $\mathrm{ch}(x)$). Donc la série numérique de terme général $\|f_k\|_{\infty,\,[0,1]}$, $k \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série de fonctions de terme général f_k, $k \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[0,1]$.

Ainsi, chaque fonction f_k, $k \in \mathbb{N}$, est continue sur le segment $[0,1]$ et la série de terme général f_k, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur ce segment. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\int_0^1 t^{2k} \left(1-t^2\right)^n dt \right) x^{2k}.$$

Cette égalité étant valable pour tout réel x, on a montré que la fonction I_n est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

9. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Donc, la fonction I_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ce qui a été démontré à la question 4.

 © Jean-Louis Rouget, 2023. Tous droits réservés.