Concours ENSAM - ESTP - POLYTECH

Epreuve de Mathématiques 1 MP

Partie I

1) Si $a = b$, $a_0 = b_0 = a$, $a_1 = b_1 = a$, puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = a$.
Si $a = b$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes et égales.

2) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ et donc $x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0$ puis $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x + y}{2}$.

3) Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n existent et sont strictement positifs.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \geqslant 0$ d'après la question précédente. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \geqslant 0$. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$. Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$ et donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

4) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1 et est majorée par $\mathrm{Max}\{a, b_1\}$. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1 et est minorée par $\mathrm{Min}\{b, a_1\}$. Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soient ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ et donc $\ell = \ell'$.

5) • Posons $a'_0 = b$, $b'_0 = a$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a'_{n+1} = \dfrac{a'_n + b'_n}{2}$ et $b'_{n+1} = \sqrt{a'_n b'_n}$. On a $a'_1 = a_1$, $b'_1 = b_1$ puis, par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a'_n = a_n$ et $b'_n = b_n$. La suite (a_n) tend vers $M(a, b)$ et la suite (a'_n) tend vers $M(b, a)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient donc $M(b, a) = M(a, b)$.

• Soit $\lambda > 0$. Posons $a'_0 = \lambda a$, $b'_0 = \lambda b$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a'_{n+1} = \dfrac{a'_n + b'_n}{2}$ et $b'_{n+1} = \sqrt{a'_n b'_n}$. On a $a'_0 = \lambda a_0$, $b'_0 = \lambda b_0$ puis, par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = \lambda a_n$ et $b'_n = \lambda b_n$. La suite (a'_n) tend vers $M(\lambda a, \lambda b)$ par définition et aussi vers $\lambda M(a, b)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

6) Puisque $a > 0$, d'après la question précédente, $M(a, b) = M\left(a \times 1, a \times \dfrac{b}{a}\right) = aM\left(1, \dfrac{b}{a}\right) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Partie II

7) Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $I(a, b)$ est une intégrale convergente.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$ est paire. On en déduit que $J(a, b)$ est une intégrale convergente et que $J(a, b) = 2I(a, b)$.

8) Pour $s > 0$, posons $\varphi(s) = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right) = t$. La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. Donc, φ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) = \left]\lim\limits_{s\to 0} \varphi(s), \lim\limits_{s\to+\infty} \varphi(s)\right[=]-\infty, +\infty[$. De plus, φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser $t = \varphi(s)$ dans $J\left(\dfrac{a + b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ et on obtient de nouveau une intégrale convergente :

$$
\begin{aligned}
J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2\right)\left(\left(\sqrt{ab}\right)^2 + t^2\right)}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(s - \frac{ab}{s}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(s - \frac{ab}{s}\right)^2\right)}} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{4s^2}{\sqrt{\left((a+b)^2 s^2 + (s^2 - ab)^2\right)\left(4abs^2 + (s^2 - ab)^2\right)}} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) ds \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(s^4 + s^2(a^2 + b^2) + a^2b^2)(s^4 + 2abs^2 + a^2b^2)}} \left(s^2 + ab\right) ds \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)(s^2 + ab)^2}} \left(s^2 + ab\right) ds \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}} ds = 2I(a, b).
\end{aligned}
$$

9) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(a_n, b_n) = I(a, b)$.

- L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $I(a_n, b_n) = I(a, b)$. Alors, d'après la question précédente,

$$I(a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{1}{2} J\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = I(a_n, b_n).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$, posons $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I(a_n, b_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(M(a, b))^2 + t^2)((M(a, b))^2 + t^2)}} = \dfrac{1}{(M(a, b))^2 + t^2}$ et de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$,

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\left(a_1^2 + t^2\right)\left(a_1^2 + t^2\right)}} = \frac{1}{a_1^2 + t^2}$$

et de plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car positive et équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

D'après le théorème de convergence dominée,

- la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (I(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge,
- la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$,
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I(a_n, b_n) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = I(M(a, b), M(a, b))$.

D'autre part, d'après la question précédente, la suite $(I(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à $I(a, b)$, et donc aussi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I(a_n, b_n) = I(a, b)$.

Finalement, $I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$.

11) $M(a,b) \in [a,b]$ et en particulier, $M(a,b) > 0$. D'après la question précédente et la question 5,

$$I(a,b) = I(M(a,b), M(a,b)) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + (M(a,b))^2}\,dt = \left[\frac{1}{M(a,b)}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{M(a,b)}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

et donc aussi

$$M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}.$$

Partie III

12) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
I(1,x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^{0} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{x}{s}\right)^2\right)\left(x^2+\left(\frac{x}{s}\right)^2\right)}}\left(-\frac{x\,ds}{s^2}\right) \\
&= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt + \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(s^2+x^2)(s^2+1)}}\,ds \\
&= 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt.
\end{aligned}$$

13) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt &= 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,dt - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \\
&= 2\int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \\
&= -2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt\right| &= 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \\
&\leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{1+0^2}\left(1+\sqrt{1+0^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \\
&= x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} o(1) \times \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} o\left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt\right).$$

On en déduit encore

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt.$$

14) Pour $t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{t^2+1} > \sqrt{t^2} = |t| \geqslant -t$ et donc $t + \sqrt{t^2+1} > 0$. Donc, la fonction $g\ :\ t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{1 + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Soit $x > 0$. En posant $t = xs$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{x\sqrt{1+s^2}}\, x ds = \left[\ln\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(x).$$

15) Donc, $I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = 2\left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.
Mais alors,

$$f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln x}.$$

16) Soit $x > 0$. Alors, $\dfrac{1}{x} > 0$ puis

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x).$$

Par suite, puisque $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \left(-\frac{\pi}{2\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right) = \frac{\pi x}{2\ln x}.$$

17) Soit $A > 0$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [A,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \geqslant A$,
$I(1,x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x,t)\, dt$.

- pour tout $x \in [A,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[A,+\infty[$,
- pour tout $(x,t) \in [A,+\infty[\times[0,+\infty[$, $|\Phi(x,t)| = \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(A^2+t^2)}} = \varphi(t)$ où de plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $x \mapsto I(1,x)$ est continue sur $[A,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, la fonction $x \mapsto I(1,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto I(1,x)$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$ (pour chaque $x > 0$, $I(1,x)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $[0,+\infty[$).
On en déduit que la fonction $f\ :\ x \mapsto M(1,x) = \dfrac{\pi}{2I(1,x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

18) D'après la question 1, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi}{2\ln x}$ et en particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut donc donc prolonger par continuité la fonction f en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement obtenu).

Etudions la dérivabilité de f en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln x}.$$

Or, quand x tend vers 0, $x\ln x$ tend vers 0 par valeurs inférieures et donc $-\dfrac{\pi}{2x\ln x}$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. La fonction f n'est pas dérivable en 0 mais la courbe représentative de f admet en $(0,0)$ l'axe (Oy) pour tangente.

19) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi x}{2\ln x}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

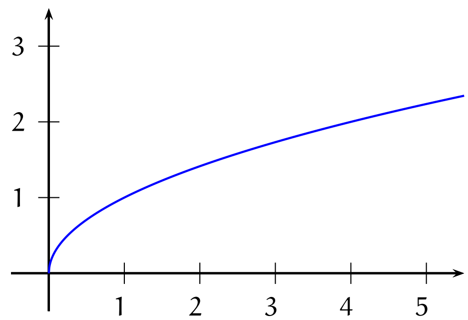
20) • Soient $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tels que $x \leqslant y$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = x$, $a'_0 = 1$, $b'_0 = y$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $a'_{n+1} = \sqrt{a'_n b'_n}$, $b'_{n+1} = \dfrac{a'_n + b'_n}{2}$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a'_n$ et $b_n \leqslant b'_n$. Puisque les suites (a_n) et (a'_n) convergent vers $M(1,x)$ et $M(1,y)$ respectivement, on a donc

$$f(x) = M(1,x) \leqslant M(1,y) = f(y).$$

La fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$.

• **Allure du graphe de** f.



Partie IV

21) Soit $x > 0$. D'après la question 8 entre autres,

$$I(1,x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{2M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)} = \frac{\pi}{2 \times \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)} = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

22) (a) • Par récurrence, la suite w est définie et strictement positive.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{w_n} - 1)^2 \geqslant 0$ et donc $w_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n} \leqslant 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} w_{n+1}^2 - w_n^2 &= \frac{4w_n}{(1+w_n)^2} - w_n^2 = w_n \frac{-w_n^3 - 2w_n^2 - w_n + 4}{(1+w_n)^2} = \frac{w_n(w_n - 1)\left(-w_n^2 - 3w_n - 4\right)}{(1+w_n)^2} \\ &= \frac{w_n(1 - w_n)\left(w_n^2 + 3w_n + 4\right)}{(1+w_n)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

car pour tout réel x, $x^2 + 3x + 4 = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}^2 \geqslant w_n^2$ puis $w_{n+1} \geqslant w_n$ (car la suite w est positive).

• La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in [w_1, 1] \subset]0,1]$ vérifiant $\ell = \dfrac{\sqrt{\ell}}{1+\ell}$ (par continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sur $]0,1]$ et donc en ℓ). Or, pour $\ell \in]0,1]$,

$$\ell = \frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell} \Leftrightarrow \sqrt{\ell}(1+\ell) = 2 \Leftrightarrow \ell(1+\ell)^2 = 4 \Leftrightarrow \ell^3 + 2\ell^2 + \ell - 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)\left(\ell^2 + 3\ell + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1.$$

La suite (w_n) converge vers 1.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 21, $I(1, w_n) = \dfrac{2}{1+w_n} I\left(1, \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}\right) = \dfrac{2}{1+w_n} I(1, w_{n+1})$ puis, en tenant compte de $I(1, w_{n+1}) \neq 0$ et $1 + w_n \neq 0$,

$$\frac{I(1,w_n)}{I(1,w_{n+1})} = \frac{2}{1+w_n}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k} &= \prod_{k=0}^{n} \frac{I(1,w_k)}{I(1,w_{k+1})} = \frac{I(1,w_0)}{I(1,w_{n+1})} \text{ (produit télescopique)}\\ &= \frac{I(1,x)}{I(1,w_{n+1})}\end{aligned}$$

et donc,

$$I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $I(1,w_{n+1}) = \dfrac{\pi}{2M(1,w_{n+1})} = \dfrac{\pi}{2f(w_{n+1})}$. Puisque la suite w converge vers 1 et que f est continue en 1, la suite $(I(1,w_{n+1}))$ converge vers $\dfrac{\pi}{2f(1)} = \dfrac{\pi}{2}$. Mais alors la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}\right) = \left(\dfrac{I(1,w_{n+1})}{I(1,x)}\right)$ converge vers $\ell = \dfrac{\pi}{2I(1,x)}$. On en déduit encore que $I(1,x)\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie V

23) Soit $x \in]-1,1[$. Alors, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant x^2 \sin^2 t \leqslant x^2 < 1$ puis $1 - x^2 \sin^2 t > 0$. Par suite, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}$ est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit l'existence de $K(x)$.

La fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

24) Soit $x > 0$. En posant $t = \tan u$, on obtient

$$\begin{aligned}I(1,x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 u)(x^2+\tan^2 u)}} \left(1+\tan^2 u\right) du\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 u}\left(x^2 + \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\right)}} \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}}\, du.\end{aligned}$$

25) Soit $x \in]0,1]$. $I(1,x)$ existe et d'autre part, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1[\subset]-1,1[$ et donc $K\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ existe puis

$$\begin{aligned}K\left(\sqrt{1-x^2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2 t}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t + x^2\sin^2 t}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}\, dt\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right) + x^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}} (-du) \text{ (en posant } u = \frac{\pi}{2} - t)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}}\, du = I(1,x).\end{aligned}$$

26) **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{2n+1} t$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{2n+1} t\, dt = \left[-\cos t \sin^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2n} t\, dt\\ &= 0 + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^{2n} t\, dt = (2n+1)(W_n - W_{n+1})\end{aligned}$$

et donc $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$ puis $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}W_n$.

(b) Ensuite, $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.$$

27) On sait que pour tout réel $t \in]-1,1[$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-t)^n$$

avec

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\times\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!} \\ &= \frac{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n.$$

De plus, le rayon de la série entière précédente est 1.

28) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$, $\left|x^2\sin^2 t\right| < 1$ et donc, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n} t$$

29) Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n} t$.

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}x^{2n}$.

La série numérique de terme général $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente (de somme $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$). Donc, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}K(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n} t\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} t\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}W_n x^{2n} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!^2}{2^{4n}(n!)^4}x^{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!^2}{16^n(n!)^4}x^{2n}.\end{aligned}$$

30)

$$M(3,5) = 5M\left(1, \frac{3}{5}\right) = \frac{5\pi}{2I\left(1, \frac{3}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2K\left(\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)} = \frac{5\pi}{2K\left(\frac{4}{5}\right)}$$

avec

$$K\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!^2}{16^n(n!)^4}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!^2}{25^n(n!)^4}.$$

Donc,

$$M(3,5) = \frac{5}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!^2}{25^n(n!)^4}}.$$

