Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I

1) a) φ est une application de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

Soient $(X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\varphi(\lambda X + \mu Y) = \begin{pmatrix} \lambda X + \mu Y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(X) + \mu\varphi(Y).$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}))$.

b) Soient $(X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$ puis $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

$$M_A Z = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ AX \end{pmatrix}.$$

Donc, $Z \in \mathrm{Ker}(M_A) \Leftrightarrow AX = Y = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(A)$ et $Y = 0$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(M_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix},\ X \in \mathrm{Ker}(A) \right\} = \{\varphi(X),\ X \in \mathrm{Ker}(A)\} = \varphi(\mathrm{Ker}(A)).$$

Ainsi, la restriction φ' de φ à $\mathrm{Ker}(A)$ est une application linéaire surjective de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathrm{Ker}(M_A)$. Enfin, si X est un élément du noyau de φ', alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$et donc $X = 0$. Par suite, φ' est injective et finalement φ' est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(A)$ sur $\mathrm{Ker}(M_A)$.

En particulier,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(M_A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)).}$$

c) Théorème du rang. Soit f une application linéaire d'un espace E de dimension finie dans un espace F.
La restriction de f à un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\mathrm{Im}(f)$. En particulier, $\mathrm{rg}(f) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(M_A) = 2n - \dim(\mathrm{Ker}(M_A)) = 2n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n - (n - \mathrm{rg}(A)) = n + \mathrm{rg}(A).$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(M_A) = n + \mathrm{rg}(A).}$$

2) a) Un calcul par blocs fournit

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

b) Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in D_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
Soient $P_1 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. La matrice D_1 est une matrice diagonale de format $2n$. D'autre part, $\det(P_1) = (\det(P))^2 \neq 0$. Par suite, P_1 est une matrice inversible de format $2n$. De plus, un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & PP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n},$$

et donc $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs permet alors d'écrire

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & PDP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = P_1 D_1 P_1^{-1}.$$

Ceci montre la matrice M_A^2 est diagonalisable.

c) $\det(M_A)^2 = (\det(A))^2 \neq 0$ et donc M_A^2 est inversible.

d) Notons $\Pi = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ le polynôme minimal de la matrice M_A^2. On sait que chaque λ_i est valeur propre de M_A^2. De plus, M_A^2 est inversible et donc aucun des λ_i n'est nul.

Puisque M_A^2 est diagonalisable, Π est à racines simples. Puisque Π est annulateur de M_A^2, on a

$$\prod_{i=1}^{k}\left(M_A^2 - \lambda_i I_{2n}\right) = 0.$$

Par suite, le polynôme $\Pi_1 = \Pi(X^2) = \prod_{i=1}^{k}(X^2 - \lambda_i)$ est annulateur de M_A. Pour chaque $i \in [\![1, k]\!]$, notons δ_i une racine carrée de λ_i dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^{k}(X - \delta_i)(X + \delta_i).$$

Si $i \neq j$, $\pm\delta_i \neq \pm\delta_j$ car $(\pm\delta_i)^2 = \lambda_i \neq \lambda_j = (\pm\delta_j)^2$. D'autre part, pour chaque i, $\delta_i \neq -\delta_i$ car sinon $\delta_i = 0$ puis $\lambda_i = 0$ ce qui n'est pas. Finalement, Π_1 est un polynôme à racines simples dans $\mathscr{C}$ et annulateur de M_A. On sait alors que M_A est diagonalisable.

3) a) Pour tout $Z \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $M_A^2 Z = M_A(M_A Z) \in \text{Im}(M_A)$. Donc $\text{Im}\left(M_A^2\right) \subset \text{Im}(M_A)$.

Supposons maintenant M_A diagonalisable. Soit $(C_1, \ldots, C_{2n})$ une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M_A et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$.

Si tous les λ_i sont nuls, M_A est nulle (car diagonalisable) et donc M_A^2 est nulle. Dans ce cas, $\text{Im}(M_A) = \{0\} = \text{Im}\left(M_A^2\right)$.

Sinon, on peut supposer que pour un certain $m \in [\![1, 2n]\!]$, les λ_i tels que $1 \leqslant i \leqslant m$ sont tous non nuls et les λ_i tels que $i > m$ sont tous nuls. Alors,

$$\begin{aligned}
\text{Im}(M_A) &= \text{Vect}(M_A C_1, \ldots, M_A C_{2n}) = \text{Vect}(\lambda_1 C_1, \ldots, \lambda_{2n} C_{2n}) = \text{Vect}(\lambda_1 C_1, \ldots, \lambda_m C_m) \\
&= \text{Vect}\left(\frac{1}{\lambda_1}\lambda_1^2 C_1, \ldots, \frac{1}{\lambda_m}\lambda_m^2 C_m\right) = \text{Vect}\left(\lambda_1^2 C_1, \ldots, \lambda_m^2 C_m\right) = \text{Vect}\left(M_A^2 C_1, \ldots, M_A^2 C_m\right) \\
&= \text{Vect}\left(M_A^2 C_1, \ldots, M_A^2 C_{2n}\right) = \text{Im}\left(M_A^2\right).
\end{aligned}$$

On a montré dans tous les cas que $\text{Im}(M_A) = \text{Im}\left(M_A^2\right)$.

b) Pour tout $Z \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$,

$$Z \in \text{Ker}(M_A) \Rightarrow M_A Z = 0 \Rightarrow M_A^2 Z = 0 \Rightarrow Z \in \text{Ker}\left(M_A^2\right).$$

Donc, $\text{Ker}(M_A) \subset \text{Ker}\left(M_A^2\right)$. D'autre part, d'après la question précédente et le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(M_A)) = \dim\left(\text{Ker}\left(M_A^2\right)\right)$. Finalement $\text{Ker}(M_A) = \text{Ker}\left(M_A^2\right)$.

c) Soit $X \in \text{Ker}A$. Alors

$$M_A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AX \end{pmatrix} = 0.$$

Donc, $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \text{Ker}\left(M_A^2\right) = \text{Ker}(M_A)$. L'égalité $M_A \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = 0$ s'écrit $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ et donc $X = 0$.

On a montré que $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et finalement que A est inversible.

d) M_A est diagonalisable et donc M_A^2 est diagonalisable ($M_A = PDP^{-1} \Rightarrow M_A^2 + PD^2P^{-1}$). Par suite, il existe un polynôme non nul π à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de M_A^2. Un calcul par blocs montre que $\Pi\left(M_A^2\right) = \begin{pmatrix} \Pi(A) & 0 \\ 0 & \Pi(A) \end{pmatrix}$.

L'égalité $\Pi\left(M_A^2\right) = 0$ fournit $\Pi(A) = 0$. Ainsi, il existe un polynôme non nul à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A et donc A est diagonalisable.

4) D'après la question 2), si A est diagonalisable et inversible, alors M_A est diagonalisable. D'après la question 3), si M_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable et inversible. Finalement,

$$\boxed{M_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable et inversible.}}$$

Exercice II

1) a) Notons R le rayon de convergence de la série entière de l'énoncé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ et $a_{2n+1} = 0$. La suite $\left(a_n 1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. Donc $R \geqslant 1$.

Mais $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ et donc $R \leqslant 1$. Finalement

$$\boxed{R = 1.}$$

b) D'après la question a), $]-1,1[\subset D_S \subset [-1,1]$. Maintenant, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\pm 1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ et donc $1 \notin D_S$ et $-1 \notin D_S$.

$$\boxed{D_S =]-1,1[.}$$

On note que la fonction S est paire.

2) a) Pour tout réel x de $]-1,1[$, $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

On sait que la somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc la fonction $T\ :\ x \mapsto xS(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout réel x de $]-1,1[$

$$T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

b) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

Par suite, il existe un réel C tel que pour tout réel x de $]-1,1[$, $xS(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right) + C = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + C$.

Pour $x = 0$, on obtient $0 = 0 + C$ et donc $C = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, posons $s_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

- Chaque fonction s_n est continue sur $]0,1[$ et intégrable sur $]0,1[$ car prolongeable par continuité en 0 et en 1.
- La série de fonction de terme général s_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction S qui est continue sur $]0,1[$ en tant que somme d'une série entière définie sur $]0,1[$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |s_n(x)|\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} < +\infty$ car $0 < \dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx.$$

b) D'après la question 2)b), pour $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = S(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

D'après la question précédente, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4) • La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[$.
• Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\ln t}{1-t^2} \sim \ln t = o\left(t^{-1/2}\right)$$

d'après un théorème de croissances comparées. Puisque $-\dfrac{1}{2} > -1$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
• Quand t tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = -\frac{\ln t}{t-1} \times \frac{1}{1+t} \sim -1.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t^2}$ est prolongeable par continuité en 1 à gauche et en particulier est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt$ existe.

5) La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ est continue sur le compact Δ en tant que fonction rationnelle définie sur Δ. Donc J existe. De plus,

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\, dy\right) dx = \int_0^1 \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \text{Arctan}^2(x)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$\boxed{J = \frac{\pi^2}{32}.}$$

6) La fonction $\theta \mapsto \dfrac{\ln\left(2\cos^2\theta\right)}{2\cos(2\theta)}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Quand θ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $\cos(2\theta)$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\ln\left(2\cos^2\theta\right)}{2\cos(2\theta)} = \dfrac{\ln\left(1+\cos(2\theta)\right)}{2\cos(2\theta)} \sim \dfrac{\cos(2\theta)}{2\cos(2\theta)} = \dfrac{1}{2}$.

La fonction $\theta \mapsto \dfrac{\ln\left(2\cos^2\theta\right)}{2\cos(2\theta)}$ est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{4}$ à gauche et en particulier est intégrable sur un voisinage à gauche de $\dfrac{\pi}{4}$.

Finalement, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\ln\left(2\cos^2\theta\right)}{2\cos(2\theta)}$ est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$. On en déduit l'existence de K.

7) a)

$$\begin{aligned}
K + L &= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(2\sin^2\theta \times 2\cos^2\theta\right)}{2\cos(2\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(\sin^2(2\theta)\right)}{2\cos(2\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(\sin(2\theta)\right)}{\cos(2\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(\sin(2\theta)\right)}{\cos^2(2\theta)} \times \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left(\sin(2\theta)\right)}{1-\sin^2(2\theta)} \times 2\cos(2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt \text{ (en posant } t = \sin(2\theta)) \\
&= \frac{I}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{K}-\mathsf{L} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln\left((2\cos^2\theta)/(2\sin^2\theta)\right)}{2\cos(2\theta)}\,d\theta = -\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(\tan(\theta))}{\cos(2\theta)}\,d\theta \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t^2)/(1+t^2)}\frac{dt}{1+t^2} \text{ (en posant } t=\tan(\theta)) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt = -I.
\end{aligned}
$$

c) On additionne les deux égalités précédentes et on obtient $-\dfrac{I}{2} = K+L+K-L = 2K = 2J = \dfrac{\pi^2}{16}$ et donc $I = -\dfrac{\pi^2}{8}$.

8) Soit $(a,b) \in]0,1[^2$ tels que $a<b$. Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ et $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,dx &= \left[\frac{\ln x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{\ln x}{2}\times\frac{2}{(1-x)^2}\times\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \\
&= \frac{\ln b}{2}\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) - \frac{\ln a}{2}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) - \int_a^b \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\ln b}{2}\ln\left(\dfrac{1+b}{1-b}\right) = \dfrac{1}{2}\ln b\ln(1+b) - \dfrac{1}{2}\ln b\ln(1-b)$. Quand b tend vers 1, $\dfrac{1}{2}\ln b\ln(1+b)$ tend vers 0. D'autre part, quand b tend vers 1, $\ln b\ln(1-b) \sim -(1-b)\ln(1-b)$ qui tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Donc $\lim\limits_{\substack{b\to 1\\ b<1}} \dfrac{\ln b}{2}\ln\left(\dfrac{1+b}{1-b}\right) = 0$.
- $\dfrac{\ln a}{2}\ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a\ln(1+a) - \dfrac{1}{2}\ln a\ln(1-a)$. Quand a tend vers 0 par valeurs supérieures $\ln a\ln(1+a) \sim a\ln a$ et $\ln a\ln(1-a) \sim -a\ln a$. Chacune de ses deux expressions tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{\substack{a\to 1\\ a>0}} \dfrac{\ln a}{2}\ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right) = 0$.

Quand a tend vers 0 et b tend vers 1, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx = -I = \frac{\pi^2}{8}$ d'après la question précédente. La question 3)b) permet alors d'affirmer que

$$
\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}
$$

Exercice III

1) Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les droites D et D′ d'équations respectives $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

$$
D \perp D' \Leftrightarrow \frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.
$$

2) Soient $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}$ puis $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. La matrice de passage de la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à la famille $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ est orthogonale et donc $\mathcal{R}'$ est un repère orthonormé.

Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$. Soit alors M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ et (X,Y) dans $\mathcal{R}'$.

$$
M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(x+y)}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}X\times\sqrt{2}Y}{a^2} = 1 \Leftrightarrow XY = \frac{a^2}{2}.
$$

Une équation de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}'$ est donc $XY = k$ avec $k = \dfrac{a^2}{2}$.

3) a) Une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = r^2$ou encore

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y - r^2 = 0.$$

b) Soit $M(X, Y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} \cap \mathcal{C} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} XY = \dfrac{a^2}{2} \\ X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y - r^2 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \dfrac{a^2}{2X} \\ X^2 + \dfrac{a^4}{4X^2} - 2\alpha X - 2\beta \dfrac{a^2}{2X} - r^2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En particulier les abscisses des points A, B, C et D sont solution de l'équation

$$4X^4 - 8\alpha X^3 - 4r^2X^2 - 4\beta a^2 X + a^4 = 0 \quad (E).$$

c) Les points A, B, C et D sont deux à deux distincts. Il est clair que leurs abscisses dans le repère $\mathcal{R}'$ sont deux à deux distincts. Les nombres X_A, X_B, X_C et X_D sont quatre réels deux à deux distincts solutions de l'équation (E) qui est de degré 4. Ce sont donc toutes les racines de l'équation (E). D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme,

$$X_AX_BX_CX_D = \frac{a^4}{4}.$$

Le produit des abscisses des points A, B, C et D est donc constant égal à $\dfrac{a^4}{4}$ quand α, β et r varie.

4) Réciproquement, soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{H}$ deux à deux distincts tels que $X_AX_BX_CX_D = \dfrac{a^4}{4}$. Soient X l'un des quatre réels X_A, X_B, X_C ou X_D puis $Y = \dfrac{a^2}{2X}$ (de sorte que Y est l'ordonnée du point considéré).
On a $(X - X_A)(X - X_B)(X - X_C)(X - X_D) = 0$ ce qui, après développement, s'écrit sous la forme

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + \frac{a^4}{4} = 0.$$

En divisant par X^2, on obtient

$$0 = X^2 + bX + c + \frac{d}{X} + \frac{a^4}{4X^2} = X^2 + bX + c + \frac{2d}{a^2}Y + Y^2 = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{d}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{d^2}{a^4} + c.$$

Par suite, $\left(X + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(Y + \dfrac{d}{a^2}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{d^2}{a^4} - c$.
Cette égalité impose $\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{d^2}{a^4} - c \geqslant 0$. On peut alors poser $\alpha = -\dfrac{b}{2}$, $\beta = -\dfrac{d}{a^2}$ et $r = \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{d^2}{a^4} - c}$. L'égalité s'écrit alors

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = r^2.$$

Ceci signifie que chacun des quatre points A, B, C et D appartient au cercle de centre $\Omega(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}'}$ et de rayon r. Enfin, A, B, C et D sont deux à deux distincts et donc $r > 0$. La condition de la question 3)c) est donc suffisante.

