Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

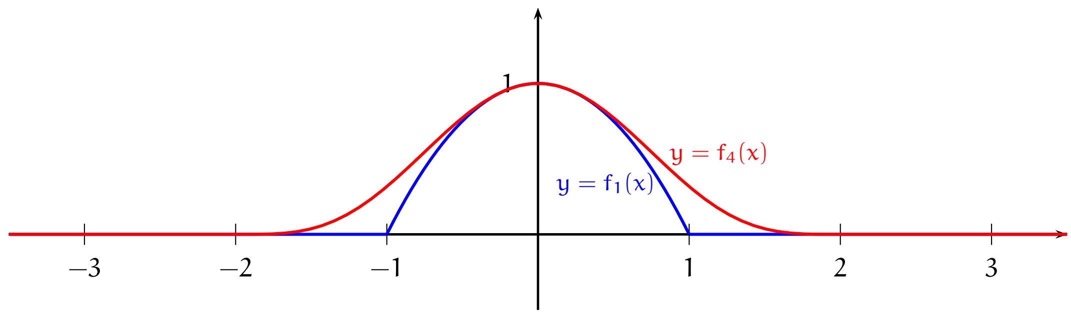
Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice 1

1. La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et en particulier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

2.

2.1. Graphique.



2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > x^2$, on a $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right)$ (car $1 - \dfrac{x^2}{n} > 0$). Quand n tend vers $+\infty$

$$f_n(x) = \exp\left(n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-x^2 o(1)\right),$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } f : x \mapsto e^{-x^2}.}$$

2.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ puis $u \in]-n, +\infty[$. On sait que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ (inégalité de convexité). Puisque le réel $x = \dfrac{u}{n}$ est strictement plus grand que -1, on en déduit que $\ln\left(1 + \dfrac{u}{n}\right) \leqslant \dfrac{u}{n}$ puis que $n \ln\left(1 + \dfrac{u}{n}\right) \leqslant u$ ou encore que $\ln\left(\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n\right) \leqslant u$ et finalement que $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Par suite, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et en particulier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ existe.

2.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \geqslant \sqrt{n}$, $|f_n(x)| = 0 \leqslant e^{x^2} = f(x)$ et si $|x| < \sqrt{n}$, $|f_n(x)| = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} = f(x)$ (d'après la question précédente car $-x^2 > -n$).
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leqslant f$. Mais alors,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$ et de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leqslant \varphi$, à savoir $\varphi = f$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \lim_{n\to+\infty} u_n.}$$

3.

3.1. $J_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$ et $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\ dx = \frac{\pi}{4}$.

3.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto \cos^{k+1} t$ et $t \mapsto \sin t$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} J_{k+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{k+1} t\ dt = \left[\sin t \cos^{k+1} t\ dt\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t (k+1)(-\sin t)\cos^k t\ dt \\ &= (k+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^k t\ dt = (k+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^k t\ dt = (k+1)(J_k - J_{k+2}), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ J_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} J_k.}$$

3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $J_1 = 1$,

$$J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times J_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times J_1 = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}.$$

3.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$J_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)} = \frac{(2 \times 4 \times \ldots \times (2n))^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n) \times (2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

3.5. Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Par suite,

$$J_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)}{(2n+1)\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose déjà $t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$. On obtient

$$u_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\ dx = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n\ dt = 2\sqrt{n}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\ dt \text{ (par parité)}.$$

On pose ensuite $t = \sin u$. On obtient

$$u_n = 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 u\right)^n \cos u\ du = 2\sqrt{2n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\ du = 2\sqrt{n}\ J_{2n+1}.$$

5. Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\pi}$. La question 2.5 permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.}$$

Exercice 2

1. On note $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique. La matrice B est orthogonale car ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales. Le déterminant de B est égal à 1 et donc B est une matrice orthogonale positive. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, u est un endomorphisme orthogonal positif c'est-à-dire une rotation. De plus, $B^2 = I_3$ et, puisque $u \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, u est un demi-tour. Enfin, $u(i+k) = i+k$ et donc $i+k$ est invariant par u. Finalement,

$$\boxed{u \text{ est le demi-tour d'axe } \mathrm{Vect}(i+k).}$$

2. Pour tout x réel, $P'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$. On en déduit le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}+d$	$\searrow$	d	$\nearrow$	$+\infty$

• Si $d + \frac{4}{27} < 0$, P est strictement négatif sur $]-\infty, 0]$ et donc ne s'annule pas sur $]-\infty, 0]$. D'autre part, la fonction P est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[d, +\infty[$ (avec $d < 0$). P s'annule donc une et une seule fois sur $[0, +\infty[$ et même sur $]0, +\infty[$ en un certain réel x_0. Puisque P' ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, x_0 est une racine simple de P.

En résumé, si $d < -\frac{4}{27}$, P admet une racine réelle simple et donc deux racines non réelles conjuguées. Dans ce cas, P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

• Il en est de même si $d > 0$: P admet une racine réelle simple dans $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ et deux racines non réelles conjuguées. Dans ce cas aussi, P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $d \in \left]-\frac{4}{27}, 0\right[$, P admet trois racines réelles, une dans $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$, une dans $\left]-\frac{2}{3}, 0\right[$ et une dans $]0, +\infty[$. Dans ce cas, P est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $d = 0$, $P = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$ et P est scindé sur $\mathbb{R}$ et si $d = -\frac{4}{27}$, $P = X^3 + X^2 - \frac{4}{27} = \left(X + \frac{2}{3}\right)^2 \left(X - \frac{1}{3}\right)$et P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Finalement,

$$\boxed{P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } d \in \left[-\frac{4}{27}, 0\right].}$$

3.

3.1. $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma$ et donc $\left\{\begin{array}{l} a = -(\alpha+\beta+\gamma) \\ b = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{array}\right.$.

3.2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On sait que A est une rotation si et seulement si A est une matrice orthogonale positive. Or

$$\begin{aligned} A \in O_3(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \text{ et } \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = 1 \text{ et } \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } a^2 = 1. \end{aligned}$$

On suppose dorénavant que $A \in O_3(\mathbb{R})$ ce qui équivaut à $a^2 = 1$ et $b = 0$ ou aussi à $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ et $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 0$.

$$\det(A) = \alpha(\beta\gamma - \alpha^2) - \beta(\beta^2 - \alpha\gamma) + \gamma(\alpha\beta - \gamma^2) = 3\alpha\beta\gamma - \left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)$$

Or,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)\quad(1)$$

et

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)+6\alpha\beta\gamma\quad(2).$$

$3\times(1)-(2)$ fournit

$$2\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)-6\alpha\beta\gamma=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)^3,$$

et donc

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\frac{1}{2}\left(3(a^2-2b)(-a)-(-a)^3-6c\right)=-3c.$$

Par suite, $\det(A)=-3c+a^3+3c=a^3$ puis

$$A\in O_3^+(\mathbb{R})\Leftrightarrow(a^2=1\text{ et }b=0\text{ et }a^3=1)\Leftrightarrow(a=1\text{ et }b=0).$$

En résumé, la matrice f est une rotation si et seulement si α, β et γ sont trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0$ ou encore $a=1$ et $b=0$.
Comme α, β et γ sont les solutions de l'équation $z^3+az^2+bz+c=0$, f est une rotation si et seulement si α, β et γ sont les trois solutions réelle d'une équation du type $z^3+z^2+c=0$ où c est un réel. D'après la question 2, cette dernière équation n'admet que des solutions réelles si et seulement si $c\in\left[-\frac{4}{27},0\right]$ et donc les triplets (a,b,c) cherchés sont les triplets de la forme

$$(1,0,c),\ c\in\left[-\frac{4}{27},0\right].$$

Exercice 3

1. Quand n tend vers $+\infty$, $v_n=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}=u_n$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$ et $v_n>0$ et d'autre part, la série de Riemann de terme général u_n diverge. D'après la propriété (R) :

$$H_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)-\ln(1)\text{ (somme télescopique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).$$

2.

2.1. Pour $k\geqslant 2$,

$$\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln(k))=\ln\left(\ln(k)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)-\ln(\ln(k))=\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right),$$

puis, quand k tend vers $+\infty$,

$$\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln(k))\sim\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\sim\frac{1}{k\ln(k)}>0.$$

Soit $n\geqslant 2$. $\sum_{k=2}^{n}\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln(k))=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))$. Comme $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))$ tend vers $+\infty$, la série de terme général $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))$ diverge. D'après la propriété (R),

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=2}^{n}(\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln(k)))=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\ln(n+1))\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\ln(n)).$$

2.2. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}=+\infty$ et la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$, $k\geqslant 2$, diverge.

2.3. La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ strictement croissante sur $[2,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions strictement positives et strictement croissantes sur $52,+\infty[$. Mais alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$.

On en déduit que pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k\ln(k)} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ puis que pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = +\infty$. On retrouve ainsi la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln k}$, $k \geqslant 2$.

3. Etude de deux exemples.

3.1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, bornée car constante et $a_1 \geqslant 1$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = n \to +\infty$ et donc la série de terme général a_n, $n \geqslant 1$, diverge. On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{\ln(n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{H_n}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$ d'après la question 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

3.2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, bornée car comprise entre 0 et 1 et $a_1 \geqslant 1$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = H_n \to +\infty$ et donc la série de terme général a_n, $n \geqslant 1$, diverge. On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{H_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k}$. D'après la question 1, quand k tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{kH_k} \sim \dfrac{1}{k\ln k} > 0$ et d'après la question 2, la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln k}$, $k \geqslant 1$, diverge. D'après a propriété (R) et les questions 1 et 2,

$$b_n = \frac{1}{\ln(H_n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(\ln n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))} = 1.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

4.

4.1. Puisque la suite (a_n) est bornée et que la suite (A_n) tend vers $+\infty$,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{n-1}+a_n}{A_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{A_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + O\left(\frac{1}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1).$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_n}{A_{n-1}} = 1$ ou encore $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

4.2. Puisque $\dfrac{A_n}{A_{n-1}}$ tend vers 1,

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}.$$

4.3. Puisque les a_n, $n \geqslant 1$, sont strictement positifs, la suite A_n est strictement croissante puis la suite $(\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}))$ est strictement positive.

Soit $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln(A_k) - \ln(A_{k-1}) = \ln(A_n) - \ln(A_1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$. Puisque $\ln(A_n)$ tend vers $+\infty$, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{A_k}{A_{k-1}}\right)$, $k \geqslant 2$, diverge. Comme $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_n}$, la propriété (R) permet d'affirmer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n).$$

Comme $\ln(A_n)$ tend vers $+\infty$, la série de terme général $\dfrac{a_n}{A_n}$, $n \geqslant 1$, est divergente.

4.4. D'après la question précédente, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(A_n)}{\ln(A_n)} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{u_n}{\sum_{k=1}^{n} u_k}$. La suite v est strictement positive. Puisque la série de terme général strictement positif u_n diverge, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Enfin, D'après la question précédente, la série de terme général v_n, $n \geqslant 1$, diverge.

6. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, on a $R_a \leqslant 1$. Puisque la suite (a_n) est bornée, on a $R_a \geqslant 1$ et finalement $R_a = 1$.

Exercice 4

1. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. N admet n valeurs propres dans $\mathbb{C}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$. Le polynôme X^k est annulateur de N et on sait que les valeurs propres de N sont à choisir parmi les racines de X^k. Comme 0 est l'unique racine de ce polynôme, on a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(N) = (0, 0, \dots, 0).}$$

2. N est diagonalisable si et seulement si l'ordre de multiplicité de 0 à savoir n est aussi la dimension de $\mathrm{Ker}(N)$. Comme la condition $\dim(\mathrm{Ker}(N)) = n$ équivaut à $N = 0$, on a montré qu'une matrice nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

3.

3.1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))\,X + \det(A)$. Le théorème de Cayley-Hamilton permet alors d'affirmer que

$$A^2 = (\mathrm{Tr}(A))\,A - \det(A)I_2.$$

3.2. • Supposons $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = 0$. Soient λ et μ les deux valeurs propres de A. On a $\lambda + \mu = \lambda^2 + \mu^2 = 0$. Mais alors, on a aussi

$$\det(A) = \lambda\mu = \frac{1}{2}\left((\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\right) = 0.$$

En résumé, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Det}(A) = 0$. La question précédente permet d'affirmer que $A^2 = 0_2$ et donc A est nilpotente.

• Supposons A nilpotente. D'après la question 1, les deux valeurs propres λ et μ de A sont nulles. On en déduit que $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 0$.

On a montré que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

4.

4.1. $E = \mathrm{Vect}(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, il en est de même pour E.

4.2. Soit $r = \dim(E)$. Puisque G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$, G contient au moins une matrice inversible qui est en particulier non nulle. On en déduit que $E \neq \{0\}$ puis que $r \in \mathbb{N}^*$.
G est une famille génératrice de E et on peut donc en extraire une base $(M_1, \dots, M_r)$ de E.

5.

5.1. On sait que $\mathrm{card}(\mathbb{U}_p) = p$ et que les éléments de $\mathbb{U}_p$ sont les $e^{2ik\pi/p}$, $k \in [\![0, p-1]\!]$.

5.2. Soit $X \in G$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^p = I_n$. On sait alors que les valeurs propres X sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur $z \mapsto z^p - 1$. Les valeurs propres de X sont donc éléments de $\mathbb{U}_p$.

6. Soit $A \in G$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$. Le polynôme $X^p - 1$ est annulateur de A et à racines simples dans $\mathbb{C}$ (car $X^p - 1$ est de degré p et admet les p racines p-èmes de l'unité pour racines). On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

7. Soit $X \in G$. $\text{Tr}(X) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{U}_p$. Comme $\text{card}\,(\mathbb{U}_p) = p$, il y a au maximum $\underbrace{p \times \ldots \times p}_{n} = p^n$ valeurs possibles pour $\text{Tr}(X)$. Donc

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{S}) \leqslant p^n < +\infty.}$$

8.

8.1. Puisque G est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \times)$, $AB^{-1} \in G$. D'après la question 6, AB^{-1} est diagonalisable et donc AB^{-1} est semblable à une matrice du type $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Mais alors N est semblable à une matrice du type $\text{diag}(\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_n - 1)$ et donc N est diagonalisable.

8.2. Puisque $\varphi(A) = \varphi(B)$, on a $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\text{Tr}(AM_i) = \text{Tr}(BM_i)$. Soit $X \in E$. X est une combinaison linéaire des M_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Puisque la trace est linéaire, on en déduit que $\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$.

8.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La matrice $X = B^1 \underbrace{AB^{-1} \ldots AB^{-1}}_{k-1}$ appartient à G en tant que produit d'éléments de G et d'inverses d'éléments de G. D'après la question précédente,

$$\text{Tr}\left((AB^{-1})^k\right) = \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX) = \text{Tr}(\underbrace{AB^{-1} \ldots AB^{-1}}_{k-1}) = \text{Tr}\left((AB^{-1})^{k-1}\right).$$

Ainsi, la suite $\left(\text{Tr}\left((AB^{-1})^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}\left((AB^{-1})^k\right) = \text{Tr}\left((AB^{-1})^0\right) = \text{Tr}(I_n) = n$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \text{Tr}\left((AB^{-1})^k\right) = n.}$$

8.4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Les matrices AB^{-1} et I_n commutent et donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On obtient

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(N^k) &= \text{Tr}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (AB^{-1})^{k-i}(-I_n)^i\right) = \text{Tr}\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (AB^{-1})^{k-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \text{Tr}\left((AB^{-1})^{k-i}\right) \text{ (par linéarité de la trace)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i}\right) n \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= (1-1)^k n = 0 \text{ (car } k \geqslant 1).
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Tr}(N^k) = 0$. D'après le résultat admis par l'énoncé, on en déduit que N est nilpotente.

8.5. D'après la question précédente, N est nilpotente et d'après la question 8.1, N est diagonalisable. Mais alors, $N = 0$ d'après la question 2. Par suite, $AB^{-1} - I_n = 0$ puis $A = B$.

On a montré que $\forall (A, B) \in G^2$, $(\varphi(A) = \varphi(B) \Rightarrow A = B)$ et donc φ est injective.

9. $\forall X \in G$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $XM_i \in G$ et donc $\text{Tr}(XM_i) \in \mathscr{S}$. On en déduit que $\varphi(G) \subset \mathscr{S}^r$.

10. Puisque φ est injective, $\text{card}(G) = \text{card}(\varphi(G)) \leqslant \text{card}(\mathscr{S}^r) < +\infty$. Ainsi, G est nécessairement un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$.

