Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

Questions d'applications du cours

Question 1.

a. FAUX
Explication. L'équation caractéristique associé est $(E_c) : z^2 - az - b = 0$. Le discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$. On sait que si $\Delta < 0$, $\mathscr{E}_{a,b}$ ne contient pas de suite géométrique réelle non nulle.

b. VRAI
Explication. Quand $a = -3$ et $b = 4$, $\Delta = 25 > 0$ et (E_c) a pour solutions $q_1 = -4$ et $q_2 = 1$. On sait alors que $\mathscr{E}_{-3,4}$ contient les deux suites géométriques linéairement indépendantes $((-4)^n)$ et (1^n).

c. FAUX
Explication. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + 4b > 0$ comme par exemple $(a,b) = (1,2)$, on sait que $\mathscr{E}_{a,b}$ contient les deux suites géométriques linéairement indépendantes.

d. FAUX
Explication. Si $(a,b) = (2,-1)$, $\Delta = 0$ et on sait que $\mathscr{E}_{2,-1}$ ne contient pas deux suites géométriques linéairement indépendantes. Les solutions de $\mathscr{E}_{2,-1}$ sont les suites de la forme $(\lambda n + \mu)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

e. VRAI
Explication. $\mathscr{E}_{a,b}$ contient des suites géométriques réelles uniquement quand $\Delta \geqslant 0$.

Question 2.

a. FAUX
Explication. On sait que f est toujours un isomorphisme.

b. VRAI
Explication. Supposons $a \neq 0$. Soit $u \in \mathscr{E}_{a,b}$. Si $g(u) = (0,0)$, alors $u_0 = u_2 = 0$ puis $u_1 = \dfrac{u_2 - u_0}{2} = 0$. On en déduit que $f(u) = 0$ puis que $u = 0$ car f est un isomorphisme. Donc g est injective puis g est un isomorphisme car $\dim(\mathscr{E}_{a,b}) = \dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$.

c. FAUX
Explication. La dimension de $\mathscr{E}_{a,b}$ est 2 dans tous les cas.

d. Quand $a = -1$ et $b = 1$, (E_c) est l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et admet pour solution $q_1 = j = e^{2i\pi/3}$ et $q_2 = \overline{q_1}$. On sait alors qu'une base de $\mathscr{E}_{-1,-1}$ est $\left(\left(\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

Question 3.

a. FAUX
Explication.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left(n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) = e^{1+o(1)}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e$.

b. FAUX
Explication. Par suite, $R = \dfrac{1}{e}$ et on sait que la série de terme général $a_n x^n$ converge pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$.

c. VRAI
Explication. $e > 2$ et donc $\dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2}$.

Question 4.

a. FAUX

Explication. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc $r \geqslant 1$.

b. VRAI

c. VRAI

Explication. Le rayon de la série $\sum \sin n x^{n-1}$ est effectivement égal à 1 car la suite $(\sin n)$ est bornée (donc rayon supérieur ou égal à 1) mais ne tend pas vers 0 (donc rayon inférieur ou égal à 1). On sait qu'une série entière et sa série dérivée ont même rayon. Donc $r = 1$.

d. VRAI

e. FAUX

Explication. Les valeurs en 0 ne coïncident pas.

f. FAUX

Explication. Les valeurs en 0 coïncident. Ensuite, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n x^n = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in} x^n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^i x\right)^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1 - xe^i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - xe^{-i}}{(1 - xe^i)(1 - xe^{-i})}\right) \\ &= \frac{x \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2}, \end{aligned}$$

D'autre part, $-\ln|1 - xe^i| = -\ln\sqrt{1 - 2x\cos 1 + x^2} = -\dfrac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos 1 + x^2)$ puis

$$\left(-\ln|1 - xe^i|\right)' = -\frac{1}{2} \times \frac{2x - 2\cos 1}{1 - 2x\cos 1 + x^2} = \frac{\cos 1 - x}{1 - 2x\cos 1 + x^2} \neq f'(x),$$

g. FAUX pour la même raison.

Problème

Partie A

1.

1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lambda_{n+2} + \lambda_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) + \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\mu_{n+2} + \mu_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+2} + \lambda_n = 0$ et $\mu_{n+2} + \mu_n = 0$. Ceci montre les suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathscr{S}_0$.

1.2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lambda_{n+4} = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \lambda_n$ et $\mu_{n+4} = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \mu_n$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+4} = \lambda_n$ et $\mu_{n+4} = \mu_n$. Ceci montre les suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 4-périodiques.

2. La suite nulle est élément de $\mathcal{S}_0$.

Soient $(u, v) \in \mathscr{S}_0^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$(\alpha u + \beta v)_{n+2} + (\alpha u + \beta v)_n = \alpha(u_{n+2} + u_n) + \beta(v_{n+2} + v_n) = 0,$$

et donc $\alpha u + \beta v \in \mathscr{S}_0$. On a montré que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. On sait que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2. D'après la question 1.1, les deux suites λ et μ sont des éléments de $\mathscr{S}_0$. Vérifions que la famille (λ, μ) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\lambda_n + \beta\mu_n = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 = 0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = 0 \end{array}\right. l \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Ainsi, la famille (λ, μ) est une famille libre de $\mathscr{S}_0$ de cardinal 2. On en déduit que la famille (λ, μ) est une base de $\mathscr{S}_0$.

4. Soit $u \in \mathscr{S}_0 \setminus \{0\}$.

4.1 Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $u = \alpha\lambda + \beta\mu$ ou encore tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Si la suite u converge, les quatre suites extraites (u_{4n}), (u_{4n+1}), (u_{4n+2}) et (u_{4n+3}) convergent et ont même limite. Ceci impose $\alpha = \beta = -\alpha = -\beta$ et donc $\alpha = \beta = 0$ ce qui n'est pas. Donc la suite u diverge.

4.2 Puisque la suite u diverge, en particulier la suite u ne tend pas vers 0 et donc la série de terme général u_n, $n \geqslant 0$, est grossièrement divergente.

4.3 Puisque la série de terme général u_n, $n \geqslant 0$, diverge, le rayon de convergence R_u associé à la suite u est inférieur ou égal à 1. Mais d'autre part, la suite u est bornée en tant que combinaison linéaire de deux suites bornées. Donc $R_u \geqslant 1$ et finalement $R_u = 1$. On en déduit que $]-1,1[\subset D_f \subset [-1,1]$.

On sait déjà que $1 \notin D_f$. D'autre part, si $x = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n x^n = u_n(-1)^n$. Comme à la question 4.1, si la suite $((-1)^n u_n)$ converge, alors $\alpha = -\beta = -\alpha = \beta$ et donc $\alpha = \beta = 0$ ce qui n'est pas. On en déduit que la suite $((-1)^n u_n)$ diverge puis que $-1 \notin D_f$. Finalement

$$\boxed{D_f =]-1,1[.}$$

Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 + u_1 x + \sum_{n\geqslant 2} u_n x^n = u_0 + u_1 x - \sum_{n\geqslant 2} u_{n-2} x^n \text{ (car } u \in \mathscr{S}_0) \\ &= u_0 + u_1 x - \sum_{n\geqslant 0} u_n x^{n+2} = u_0 + u_1 x - x^2 \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n = u_0 + u_1 x - x^2 f(x), \end{aligned}$$

et donc $f(x) = \dfrac{u_0 + u_1 x}{1 + x^2}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{u_0 + u_1 x}{1 + x^2}.}$$

Partie B

1.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 2(-1)^n = (2, -2, 2, -2, \ldots)$. Cette suite n'est pas constante et donc $u \notin \mathscr{S}$.

1.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+2} + u_n = (-1)^{E(\frac{n}{2}+1)} + (-1)^{E(\frac{n}{2})} = (-1)^{E(\frac{n}{2})+1} + (-1)^{E(\frac{n}{2})} = 0$. Donc $u \in \mathscr{S}$ avec $a = 0$.

1.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+2} + u_n = 10$. Donc $u \in \mathscr{S}$ avec $a = 5$.

2. Soient $k \in \mathbb{R}$ puis $u \in E$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 2\lambda$ et donc $u \in \mathscr{S}$ en prenant $a = k$.

$$\boxed{\text{Les suites constantes appartiennent à } \mathscr{S}.}$$

3. Soient $(k, q) \in \mathbb{R}^2$ puis $u \in E$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = kq^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = kq^n(q^2 + 1)$. Puisque q est réel, $q^2 + 1 \neq 0$ et donc si $k \neq 0$, la suite $(u_{n+2} + u_n)$ est constante si et seulement si la suite (q^n) est constante ce qui équivaut à $q = 1$. Donc si $k \neq 0$, u est nécessairement constante ce qui reste vrai si $k = 0$.
Réciproquement, les suites constantes appartiennent à $\mathscr{S}$ d'après la question précédente et on a montré que

$$\boxed{\text{Les suites géométriques appartenant à } \mathscr{S} \text{ sont les suites constantes.}}$$

4. La suite nulle est constante et donc dans $\mathscr{S}$.
Soient $(u, v) \in \mathscr{S}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + u_n = 2a$ et $v_{n+2} + v_n = 2b$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$(\alpha u + \beta v)_{n+2} + (\alpha u + \beta v)_n = \alpha(u_{n+2} + u_n) + \beta(v_{n+2} + v_n) = 2(\alpha a + \beta b) \quad (*).$$

Ainsi, il existe un réel c, à savoir $c = \alpha a + \beta b$, tel que pour tout entier naturel n, $(\alpha u + \beta v)_{n+2} + (\alpha u + \beta v)_n = 2c$ et donc la suite $\alpha u + \beta v$ appartient à $\mathscr{S}$. On a montré que

$$\boxed{\mathscr{S} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

5. Il est clair que $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. D'autre part, les suites non nulles et constantes sont dans $\mathscr{S}$ mais pas dans $\mathscr{S}_0$ et donc $\mathscr{S} \not\subset \mathscr{S}_0$.

6. φ est une application de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$. φ associe à un élément u de $\mathscr{S}$ le réel a tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 2a$. Le calcul $(*)$ de la question 4 montre alors que φ est linéaire. Finalement, φ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}$.

Les éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont les suites u éléments de $\mathscr{S}$ telles que $a = 0$ c'est-à-dire les éléments de $\mathscr{S}_0$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathscr{S}_0.}$$

7. • $\mathrm{Vect}(v)$ est l'espace des suites constantes et donc $\mathrm{Vect}(v)$ est un sous-espace de $\mathscr{S}$ d'après la question 2. D'autre part, $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace de $\mathscr{S}$ d'après la question 5.
• Les éléments de $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathscr{S}_0$ sont les suites constantes éléments de $\mathscr{S}_0$. Une telle suite est nécessairement nulle et donc $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathscr{S}_0 = \{0\}$.
• Soient $u \in \mathscr{S}$ puis $a = \varphi(u) = \dfrac{u_0 + u_2}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - a$ de sorte que $u = w + av$. Vérifions que $w \in \mathscr{S}_0$. Pour tout entier naturel n,

$$w_{n+2} + w_n = u_{n+2} + u_n - 2a = 0,$$

et donc $w \in \mathscr{S}_0$. Ainsi, tout élément de $\mathscr{S}$ est somme d'un élément de $\mathscr{S}_0$ et de $\mathrm{Vect}(v)$ et donc $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 + \mathrm{Vect}(v)$. Finalement

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \oplus \mathrm{Vect}(v).}$$

8. D'après la question précédente, $u = w + \dfrac{u_0 + u_2}{2}v$puis d'après la question 3 de la partie A, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w_n = \alpha\lambda_n + \beta\mu_n$. Donc, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{u_0 + u_2}{2}.$$

$n = 0$ fournit $\alpha + \dfrac{u_0 + u_2}{2} = u_0$ et donc $\alpha = \dfrac{u_0 - u_2}{2}$ et $n = 1$ fournit $\beta + \dfrac{u_0 + u_2}{2} = u_1$ et donc $\beta = \dfrac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{u_0 - u_2}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{u_0 + u_2}{2}.}$$

9. Soit $u \in \mathscr{S}$. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+4} = \frac{u_0 - u_2}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) + \frac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) + \frac{u_0 + u_2}{2} = u_n.$$

Donc u est 4-périodique.

10. • Il est clair que θ est une application linéaire.
• Vérifions que θ est injective. Soit $u \in \mathscr{S}$. Si $u \in \mathrm{Ker}(\theta)$, alors $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ puis pour tout entier naturel n, $u_n = 0$ d'après le résultat encadré de la question 8.
• D'après la question 7, $\dim(\mathscr{S}) = \dim(\mathscr{S}_0) + \dim(\mathrm{Vect}(v)) = 2 + 1 = 3$.

Ainsi, θ est une application linéaire injective de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}^3$ et de plus $\dim(\mathscr{S} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\theta \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

11. D'après la question 8, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1\right),\ J_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \mu_n \text{ et } K_n = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1\right)$$

Détaillons les cinq premiers termes de chacune de ces suites dans un tableau :

n	0	1	2	3	4
I_n	1	0	0	1	1
J_n	0	1	0	-1	0
K_n	0	0	1	1	0

12.

12.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$(T_k(\alpha u + \beta v))_n = (\alpha u + \beta v)_{kn} = \alpha u_{kn} + \beta v_{kn} = \alpha (T_k(u))_n + \beta (T_k(v))_n = (\alpha T_k(u) + \beta T_k(v))_n,$$

et donc $T_k(\alpha u + \beta v) = \alpha T_k(u) + \beta T_k(v)$. On a montré que T_k est un endomorphisme de E.

12.2 La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathscr{S}$. Pour tout entier naturel n,

$$(T_2(\lambda))_{n+2} + (T_2(\lambda))_n = \cos((n+2)\pi) + \cos(n\pi) = 2(-1)^n.$$

Ainsi, la suite $((T_2(\lambda))_{n+2} + (T_2(\lambda))_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante et donc la suite $(T_2(\lambda))_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans $\mathscr{S}$. On a montré que $\mathscr{S}$ n'est pas stable par T_2.

12.3 • Pour tout entier naturel n, $(T_3(\lambda))_n = \cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ puis

$$\begin{aligned}(T_3(\lambda))_{n+2} + (T_3(\lambda))_n &= (-1)^{n+2}\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + (-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $T_3(\lambda)$ appartient à $\mathscr{S}$.

- Pour tout entier naturel n, $(T_3(\mu))_n = \sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ puis

$$\begin{aligned}(T_3(\mu))_{n+2} + (T_3(\mu))_n &= (-1)^{n+2}\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + (-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $T_3(\mu)$ appartient à $\mathscr{S}$.

- Pour tout entier naturel n, $(T_3(\nu))_{n+2} + (T_3(\nu))_n = 1 + 1 = 2$ et donc $T_3(\nu)$ appartient à $\mathscr{S}$.

Mais alors $T_3(\mathscr{S}) = T_3\left(\text{Vect}(\lambda, \mu, \nu)\right) = \text{Vect}\left(T_3(\lambda), T_3(\mu), T_3(\nu)\right) \subset \mathscr{S}$.

$$\boxed{\mathscr{S} \text{ est stable par } T_3.}$$

12.4 • $I = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots)$ puis $T_3(I) = (1, 1, 0, \dots)$ puis $\theta(T_3(I)) = (1, 1, 0) = \theta(I) + \theta(J)$. Puisque θ est un isomorphisme, on en déduit que $T_3(I) = I + J$.
• $J = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$ puis $T_3(I) = (0, -1, 0, \dots)$ puis $\theta(T_3(I)) = (0, -1, 0) - \theta(J)$et donc $T_3(J) = -J$.
• $K = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$ puis $T_3(K) = (0, 1, 1, \dots)$ puis $\theta(T_3(K)) = (0, 1, 1) = \theta(J) + \theta(K)$ et donc $T_3(K) = J + K$.

La matrice demandée est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12.5 En développant suivant la deuxième colonne, on obtient

$$\chi_{\tau_3} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X+1).$$

χ_{τ_3} est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet -1 pour valeur propre simple et 1 pour valeur propre double. Donc τ_3 est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(\tau_3 - \text{Id})$ est de dimension 2 ou encore $T - I_3$ est de rang 1. Or $T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est effectivement de rang 1 et donc τ_3 est diagonalisable.

12.6 Il existe donc une base de $\mathscr{S}$ dans laquelle la matrice de τ_3 est $\text{diag}(1, 1, -1)$. On en déduit que τ_3 est une symétrie par rapport à un plan (parallèlement à une certaine droite).

13. Soit $u \in \mathscr{S}$. On pose $a = \dfrac{u_0 + u_2}{2}$. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= u_0 + u_1 x + \sum_{n \geqslant 2} u_n x^n = u_0 + u_1 x + \sum_{n \geqslant 2} (-u_{n-2} + 2a) x^n = u_0 + u_1 x - \sum_{n \geqslant 0} u_n x^{n+2} + 2a \sum_{n \geqslant 2} x^n \\
&= u_0 + u_1 x - x^2 h(x) + 2a \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right) = u_0 + u_1 x + \frac{(u_0 + u_2) x^2}{1-x} - x^2 h(x)
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ h(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(u_0 + u_1 x + \frac{(u_0 + u_2) x^2}{1-x} \right).}$$

• Si $u_0 + u_2 = 0$ (ou encore si $u \in \mathscr{S}_0$), alors pour tout $x \in]-1, 1[$, $h(x) = \dfrac{u_0 + u_1 x}{1 + x^2}$ et donc h se prolonge par continuité en 1 et en -1 (mais d'après la question 4.3 de la partie A, h n'est définie ni en 1, ni en -1 quand $u \neq 0$).
• Si $u_0 + u_2 \neq 0$, $h(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{u_0 + u_2}{2(1-x)} = \dfrac{a}{1-x}$ et donc h n'a pas de limite réelle en 1 ou encore h ne se prolonge pas par continuité en 1. Par contre, h se prolonge par continuité en -1 en posant $h(-1) = \dfrac{1}{2} \left(u_0 + u_1 + \dfrac{(u_0 + u_2)}{2} \right) \dfrac{1}{2} (u_0 + u_1 + a)$.

Partie C

1. Soit $u \in \mathscr{S}_p$. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2p} = -u_{n+p} + 2a = -(-u_n + 2a) + 2a = u_n.$$

Donc, la suite u est $2p$-périodique.

2.

2.1 En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_F = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -X & 2 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (-X) \times (-X)^{p-1} \times (1-X) - (-1)^{p+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (-X)^p (1-X) - (-1)^{p+1} (1-X) = (-1)^{p+1} (X-1)(X^p + 1).$$

2.2 On en déduit que $\text{Sp}(F) = \{1\} \cup \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{p} + \frac{2k\pi}{p}\right)},\ k \in [\![0, p-1]\!] \right\}$.

2.3 0 n'est pas valeur propre de F et donc F est inversible.

2.4 χ_F n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc F n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par contre, χ_F est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc F est diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{C})$.

3. • δ est une application de $\mathscr{S}_p$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$.
• Soient $(u, v) \in \mathscr{S}_p^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha u + \beta v) &= \left(\alpha u_0 + \beta v_0, \dots, \alpha u_{p-1} + \beta v_{p-1}, \frac{\alpha u_0 + \beta v_0 + \alpha u_p + \beta v_p}{2} \right) \\
&= \alpha \left(u_0, \dots, u_{p-1}, \frac{u_0 + u_p}{2} \right) + \beta \left(v_0, \dots, v_{p-1}, \frac{v_0 + v_p}{2} \right) = \alpha \delta(u) + \beta \delta(v).
\end{aligned}$$

Donc, δ est une application linéaire de $\mathscr{S}_p$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$.

• Vérifions que δ est injective. Soit $u \in \text{Ker}(\delta)$. Alors $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 0$ et si pour $n \geqslant 0$, on a $u_n = u_{n+1} = \ldots = u_{n+p-1} = 0$, alors $u_{n+p} = 2a - u_n = 0$. Ceci montre par récurrence que pour otu $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et donc que $u = 0$. Ceci montre que δ est injective.

• Vérifions que δ est surjective. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$.
Posons déjà $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = a_k$ puis on définit les termes d'une suite u par récurrence en posant : $\forall n \in\geqslant p$, $u_n = 2a_p - u_{n-p}$. u est par construction un élément de $\mathscr{S}_p$ vérifiant $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = a_k$ et aussi $\dfrac{u_0 + u_p}{2} = a_p$ ou encore u est un élément de $\mathscr{S}_p$ tel que $\delta(u) = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p)$. Ceci montre que δ est surjective.

Finalement, δ est un isomorphisme de $\mathscr{S}_p$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$ et on a en particulier $\dim(\mathscr{S}_p) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p + 1$.

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_p) = p + 1.}$$

4.

4.1 Soient $u \in \mathscr{S}_p$ puis $t = \psi(u)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+p} + t_= u_{n+1+p} + u_{n+1} = 2a,$$

et donc ψ est une application de $\mathscr{S}_p$ dans lui-même. La linéarité de ψ étant claire, on a montré que

$$\boxed{\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{S}_p).}$$

4.2 Soit $u \in \mathscr{S}_p$. Pour tout entier naturel n,

$$\left(\psi^{2p}(u)\right)_n = u_{n+2p} = u_n.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathscr{S}_p$, $\psi^{2p}(u) = u$ et donc

$$\boxed{\psi^{2p} = \text{Id}_{\mathscr{S}_p}.}$$

4.3 Notons $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ puis posons $\mathcal{C}_p = (U_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$.
Pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $U_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-k}, 0, \ldots)$ et donc $\psi(U_k) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p+1-k}, \ldots) = \delta^{-1}(e_{k-1} = U_{k-1}$.
Ensuite, $U_0 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, -1, 0, \ldots)$ et donc $\psi(U_0) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, -1, 0, \ldots) = \delta^{-1}(-e_{p-1})$ et donc $\psi(U_0) = -U_{p-1}$.
Enfin, $U_p = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, 2, 2, \ldots)$ puis $\psi(U_p) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, 2, 2, \ldots) = \delta^{-1}((\underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, 2, 1)) = \delta^{-1}(2e_{p-1} + e_p)$ et donc $\psi(U_p) = 2U_{p-1} + U_p$.

En résumé, $\text{Mat}_{\mathcal{C}_p} = F$.

4.4 D'après la question 2.4, ψ n'est pas diagonalisable.

4.5 D'après les questions 4.2 ou 2.3, ψ est bijective et $\psi^{-1} = \psi^{2p-1}$, ψ^{2p-1} étant l'application $u \in \mathscr{S}_p \mapsto \psi(u) = t$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+2p-1}$.

