Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

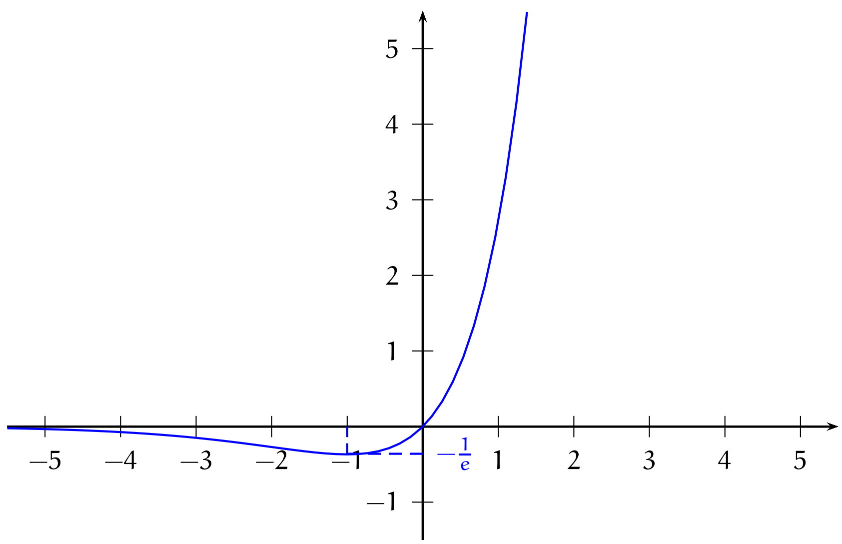
Partie I

1. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^x$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Graphe de f



4. f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et f' est strictement positive sur $]-1,+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.
f est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ et donc f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f([-1,+\infty[) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

5. Soit g la réciproque de $f_{/[-1,+\infty[}$. Puisque f est continue sur $[-1,+\infty[$, on sait que g est continue sur $f([-1,+\infty[) = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$. De plus, pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, on a $f(g(x)) = x$ ou encore $g(x)e^{g(x)} = x$.
f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et f' ne s'annule pas sur cet intervalle. On sait alors que g est de classe C^∞ sur $f(]-1,+\infty[) = \left]-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

Partie II

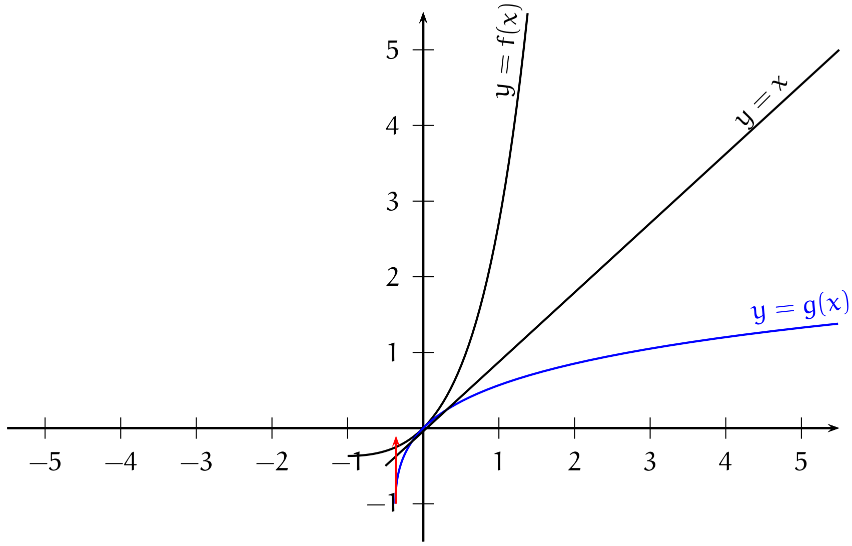
1. $f(0) = 0$ et donc $g(0) = 0$. $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$ et donc $g\left(-\dfrac{1}{e}\right) = -1$. $f(1) = e$ et donc $g(e) = 1$.

2. Soit $x \in \left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$. On sait que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}} = \frac{1}{x + g(x)}.$$

(car $g(x)e^{g(x)} = x$).

3. On sait que le graphe de g est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice.



Puisque $f'(-1) = 0$, on sait que g n'est pas dérivable en $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et que sa courbe représentative admet au point de coordoonées $\left(-\frac{1}{e}, -1\right)$ une tangente parallèle à (Oy).

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{g(f(X))}{f(X)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$ et donc la courbe représentative de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

5. **(a)** g est continue sur $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et donc g admet des primitive sur cet intervalle.

Pour tout $u \in \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$, $h(u) = \int_0^u g(t)\ dt$. Soit alors $u \in \left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Puisque l'application g est de classe C^1 sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$, on peut poser $x = g(t)$ et donc $t = f(x)$ puis $dt = f'(x)\ dx$. On obtient

$$h(u) = \int_0^u g(t)\ dt = \int_{g(0)}^{g(u)} x(x+1)e^x\ dx = \int_0^{g(u)} x(x+1)e^x\ dx.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 + x)e^x$ est de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Comme $\left((ax^2 + bx + c)e^x\right)' = (ax^2 + (b + 2a) + (c + b))e^x$, on choisit a, b et c tels que $a = 1$, $b + 2a = 1$ et $c + b = 0$ c'est-à-dire $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. Par suite,

$$h(u) = [(x - 2 - x + 1)e^x]_0^{g(u)} = \left(g(u)^2 - g(u) + 1\right) e^{g(u)} - 1 = ug(u) - u + e^{g(u)} - 1.$$

Ce résultat est encore valable pour $u = -\frac{1}{e}$ par continuité de g en h.

(b) $\int_{-\frac{1}{e}}^0 g(t)\ dt = -h\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} g\left(-\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} - e^{g\left(-\frac{1}{e}\right)} + 1 = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$

Partie III

1. Si $c = 1$, la suite U est constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

2. Si la suite U converge vers un certain réel ℓ, alors $\ell \geqslant 0$ car la suite U est positive. Ensuite, $\ell = e^{\ell \ln c}$ puis $-\ell \ln c e^{-\ell \ln c} = -\ln c$ ou encore $f(-\ell \ln c) = -\ln c$.

Puisque $0 < c < e^{1/e}$ on a $\ln c < \dfrac{1}{e}$ ou encore $-\ln c > -\dfrac{1}{e}$.

Ensuite, $u_0 = c < e^{1/e} < e$ et si pour $n \geqslant 0$, $u_n < e$, alors

$$u_{n+1} = e^{u_n \ln c} < e^{e \times \frac{1}{e}} = e.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e$. Mais alors $0 \leqslant \ell \leqslant e$.

En résumé, $-\ln c > -\dfrac{1}{e}$ et $0 \leqslant \ell \leqslant e$. Mais alors $-\ell \ln c > -1$ et l'égalité $f(-\ell \ln c) = -\ln c$ s'écrit encore $-\ell \ln c = g(-\ln c)$ ou finalement

$$\boxed{\ell = -\frac{g(-\ln c)}{\ln c}.}$$

3. **(a)** $u_0 = \sqrt{2} = 1,4\ldots$ puis $u_1 = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} = 1,6\ldots$. Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

- C'est vrai pour $n = 0$ d'après la question précédente.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. Puisque $\sqrt{2}$ est supérieur à 1, la fonction $x \mapsto \sqrt{2}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\sqrt{2}^{u_n} \leqslant \sqrt{2}^{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{2}^2$ et finalement que $u_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 et donc la suite (u_n) converge vers un certain réel ℓ. D'autre part, $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ et $e^{\frac{1}{e}} = 1,44\ldots$ Donc, $c < e^{\frac{1}{e}}$. La question 2. nous permet d'affirmer que

$$\ell = -\frac{g\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}.$$

Mais $f(-\ln 2) = -\ln 2 e^{-\ln 2} = -\dfrac{\ln 2}{2} = -\ln\left(\sqrt{2}\right)$ et de plus, $-\ln\left(\sqrt{2}\right) = -0,34\ldots > -0,36\ldots = -\dfrac{1}{e}$. On en déduit que $g\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) = -\ln 2$ puis que

$$\ell = -\frac{-\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = 2.$$

4. **(a)** Puisque $e^{-e} < 1$, la fonction w est décroît strictement sur $]0, +\infty[$, de 1 à 0.

(b) **i.** En particulier, $w(]0, +\infty[) =]0, 1[\subset]0, +\infty[$. Donc $w \circ w$ est définie et croissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Ensuite, la suite U est positive et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = w \circ w(u_{2n})$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sgn}(u_{2n+4} - u_{2n+2}) = \operatorname{sgn}(w \circ w(u_{2n+2}) - w \circ w(u_{2n})) = \operatorname{sgn}(u_{2n+2} - u_{2n}),$$

et donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Soit $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right]$. Puisque $w \circ w$ est croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$, on a $w \circ (0) \leqslant w \circ w(x) \leqslant w \circ w\left(\dfrac{1}{e}\right)$ avec $w \circ w(0) = w(1) = \dfrac{1}{e^e} \geqslant 0$ et $w \circ w\left(\dfrac{1}{e}\right) = w(e^{-1})e^{-1}$.

En résumé, $\forall x > 0$, $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right] \Rightarrow w \circ w(x) \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right]$. Puisque l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ est stable par $w \circ w$ et que $u_0 = \dfrac{1}{e^e} \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right]$, la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$.

ii. $u_1 = e^{-e^{-e+1}} \in]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = w \circ w(u_{2n+1})$. Par suite, comme à la question précédente, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

$u_1 = \dfrac{1}{e^{e^{-e+1}}} \geqslant \dfrac{1}{e^{e^0}} = \dfrac{1}{e}$. D'autre part, si x est un réel supérieur ou égal à $\dfrac{1}{e}$, alors $w \circ w(x) \geqslant w \circ w\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \geqslant \dfrac{1}{e}$.

iii. $\ln(u_0) = \ln\left(e^{-e}\right) = -e$. Puis,

$$\ln(u_2) = \ln\left(w \circ w\left(e^{-e}\right)\right) = \ln\left(w\left(e^{-e^{1-e}}\right)\right) = \ln\left(e^{-e\times e^{-e^{1-e}}}\right) = -e \times e^{-e^{1-e}}$$

puis $-e^{1-e} \leqslant 0$ et donc $e^{-e^{1-e}} \leqslant 1$ puis $\ln(u_2) = -e \times e^{-e^{1-e}} \geqslant -e = \ln(u_0)$ et finalement $u_2 \geqslant u_0$.

iv. Puisque la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et que $u_0 \leqslant u_2$, on en déduit plus précisément que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Puisque la fonction w est décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit encore que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = w(u_{2n+2}) \leqslant w(u_{2n}) = u_{2n+1}$ et donc la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

v. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{e}$. Donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell_1 \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right]$. De même, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{e}$. Donc la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell_2 \in \left[\dfrac{1}{e}, u_1\right] \subset \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$.
Les deux réels ℓ_1 et ℓ_2 sont éléments de $[0,1]$ et solution de l'équation $w(w(x)) - x = 0$. D'après le résultat admis par l'énoncé, la fonction $x \mapsto w(w(x)) - x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et donc injective sur $[0,1]$. On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$. Enfin, $\ell_1 \leqslant \dfrac{1}{e} \leqslant \ell_2$ fournit $\ell_1 = \ell_2 = \dfrac{1}{e}$.

Ainsi, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite, à savoir $\dfrac{1}{e}$. On sait alors que

$$\boxed{\text{la suite } U \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}.}$$

Partie IV

1. (a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(1+o(1))$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

(b) Pour $n \geqslant 1$, posons $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{n!}$. Pour $n \geqslant 1$, on a $a_n \neq 0$ puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \times \frac{n!}{n^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \times E = e$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = \dfrac{1}{e}$.

2. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{e^{n+1}}{e^n} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} v_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.}$$

ii. En particulier, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

iii. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)) = \ln(u_n)-\ln(u_1) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \ln(u_n)-1, \end{aligned}$$

et donc $u_n = \exp\left(1+\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right)$. Puisque la série de terme général v_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge, la suite (u_n) converge vers $\exp\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right)$.

iv. $L = \exp\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) > 0$. La question précédente permet alors d'écrire $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} L$ puis

$$\frac{n^{n-1}}{e^n n!} = \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} \times \frac{1}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{Ln\sqrt{n}}$$

(b) Mais alors, $\frac{n^{n-1}}{e^n n!} \underset{=}{\sim} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et puisque $\frac{3}{2} > 1$, la série de terme général $\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ converge.

(c) Soit $|z|$ un nombre complexe de module $R = \frac{1}{e}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{n^{n-1}}{n!}z^n\right| = \frac{n^{n-1}}{n!e^n}$ et donc la série de terme général $\frac{n^{n-1}}{n!}z^n$ est absolument convergente.

Par suite, la fonction S est définie sur la totalité du disque fermé de convergence : $\left\{z \in \mathbb{C}/\ |z| \leqslant \frac{1}{e}\right\}$.

Partie V - A

1. On sait que $\mathcal{E}_R$ est contenu dans $\mathcal{K}_R$ car une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ est en particulier de classe C^∞ sur $]-R, R[\setminus\{0\}$.

• La fonction nulle appartient à $\mathcal{L}_R$. Ensuite, d'après la remarque de l'énoncé, $\mathcal{L}_R$ est contenue dans $\mathcal{K}_R$.

Soient $(f_1, f_2) \in (\mathcal{L}_R)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(h_1, h_2) \in (\mathcal{E}_R)^2$ et $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\},\ f_1(x) = \frac{h_1(x)}{x^{n_1}} \text{ et } f_2(x) = \frac{h_2(x)}{x^{n_2}}.$$

Mais alors,

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\},\ \lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x) = \lambda_1\frac{h_1(x)}{x^{n_1}}+\lambda_2\frac{h_2(x)}{x^{n_2}} = \frac{\lambda_1 x^{n_2}h_1(x)+\lambda_2 x^{n_1}h_2(x)}{x^{n_1+n_2}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \lambda_1 x^{n_2} h_1(x) + \lambda_2 x^{n_1} h_2(x)$ et dans $\mathcal{L}_R$ et que $n_1 + n_2$ est dans $\mathbb{N}$, ceci montre que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est dans $\mathcal{L}_R$.

On a montré que $\mathcal{L}_R$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}_R$.

• Soit $f \in \mathcal{E}_R$. Comme $\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{f(x)}{x^0}$, f est un élément de $\mathcal{L}_R$. On a montré que $\mathcal{E}_R \subset \mathcal{L}_R$.

2. Existence. Soit $h \in \mathcal{L}_R$. Il existe $h_1 \in \mathcal{E}_R$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $h(x) = \dfrac{h_1(x)}{x^n}$.

Ensuite, il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]R, R[$, $h_1(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Par suite, pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k-n} = \sum_{i=-n}^{+\infty} a_{i+n} x^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h) x^i,$$

où $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i(h) = \begin{cases} a_{i+n} \text{ si } i \geqslant -n \\ 0 \text{ si } i < n \end{cases}$.

Unicité. Soit $h \in \mathcal{L}_R$. Si h a une limite réelle en 0, la fonction h, prolongée par continuité en 0, est développable en série entière sur $]-R, R[$ et on sait que les coefficients $\alpha_i(h)$ sont uniquement définis à partir de h.

Supposons alors que h n'a pas une limite réelle en 0. Il existe $h_1 \in \mathcal{E}_R$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $h(x) = \dfrac{h_1(x)}{x^n}$. Quite à simplifier par une puissance de x, on peut supposer que $h_1(0) \neq 0$. Dans ce cas, n et h_1 sont uniquement défini à partir de h car n est l'unique entier tel que la fonction $x \mapsto x^n h(x)$ ait une limite réelle non nulle en 0 puis h_1 est la fonction $x \mapsto x^n h(x)$ prolongée par continuité en 0.

On écrit alors $\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $x^n h(x) = \displaystyle\sum_{i=-n}^{+\infty} \alpha_i(h) x^{i+n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k-n}(h) x^k = h_1(x)$ et on sait que

$$\forall k \geqslant 0,\ \alpha_{k-n} = \frac{h_1^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(x^n h)^{(k)}(0)}{k!}$$

où $x^n h$ désigne la fonction $x \mapsto x^n h(x)$ prolongée par continuité en 0. D'autre part, $\forall k < 0$, $\alpha_{k-n}(h) = 0$. On a montré que la suite $(\alpha_i(h))_{i\in\mathbb{Z}}$ est uniquement définie à partir de h.

3. Soient $(h_1, h_2) \in (\mathcal{L}_R)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On sait déjà que $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ est dans $\mathcal{L}_R$. Pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$\lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) = \lambda_1 \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h_1) + \lambda_2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h_2) x^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_1 \alpha_i(h_1) + \lambda_2 \alpha_i(h_2)\right) x^i,$$

et en particulier, par unicité des α_i,

$$\alpha_{-1}(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 \alpha_{-1}(h_1) + \lambda_2 \alpha_{-1}(h_2).$$

et donc α_{-1} est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_R$, clairement nulle sur $\mathcal{E}_R$.

4. Pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, posons $h(x) = \dfrac{h_1(x)}{x^n}$ où $h_1 \in \mathcal{E}_R$ et $n \in \mathbb{N}$. h est dérivable sur $]-R, R[\setminus\{0\}$ et pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$h'(x) = \frac{h_1'(x)}{x^n} - \frac{n h_1(x)}{x^{n+1}} = \frac{x h_1'(x) - n h_1(x)}{x^{n+1}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto x h_1'(x) - n h_1(x)$ est encore dans $\mathcal{E}_R$, h' est dans $\mathcal{L}_R$. Ensuite, $\alpha_{-1}(h')$ est le coefficient de x^n dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto x h_1'(x) - n h_1(x)$. En posant $a_n = \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!}$, ce coefficient vaut $n a_n - n a_n = 0$. Donc $\alpha_{-1}(h') = 0$.

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$ puis pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x+1)e^x}{x e^x} = \frac{1}{x} + 1.$$

Ceci montre que la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est dans $\mathcal{L}_R$ et que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k\left(\dfrac{f'}{f}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \in \{-1,0\} \\ 0 \text{ si } k \notin \{-1,0\} \end{cases}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{f^n(x)} = \frac{1}{x^n}e^{-nx} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-n)^i}{i!}x^{i-n} = \sum_{k=-n}^{+\infty} \frac{(-n)^{k+n}}{(k+n)!}x^k.$$

Ceci montre que la fonction $\dfrac{1}{f^n}$ est dans $\mathcal{L}_R$ et que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k\left(\dfrac{1}{f^n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-n)^{k+n}}{(k+n)!} \text{ si } k \geqslant -n \\ 0 \text{ si } k < -n \end{cases}$.

Partie V - B

1. $c_0 = g(0) = 0$ et $c_1 = g'(0) = \dfrac{1}{f'(g(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

2. f réalise une bijection strictement croissante de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$. Par suite, l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2e} \in \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ (resp. $f(x) = \dfrac{1}{2e}$) admet une unique solution x_0 (resp. x_1) dans $[-1, +\infty[$. Par stricte croissance de f sur $[-1, +\infty[$, si $x_0 < x < x_1$, alors $-\dfrac{1}{2e} < f(x) < \dfrac{1}{2e}$ ou encore $|xe^x| < \dfrac{1}{2e}$.
Enfin, puisque $f(x_0) < 0$ et $f(x_1) > 0$, on a $x_0 < 0 < x_1$. Mais alors $R = \text{Min}\{|x_0|, |x_1|\}$ convient.

3. Pour tout réel x de $]-R, R[$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2e}$ puis, pour $i \in \mathbb{N}$, $\sup\{|c_i f^i(x)|,\ x \in]-R,R[\} \leqslant |c_i|\left(\dfrac{1}{2e}\right)^i$. Puisque $\dfrac{1}{2e} < \dfrac{1}{e}$ et que $R_c \geqslant \dfrac{1}{e}$ d'après le résultat admis par l'énoncé, on sait que la série numérique de terme général $c_i\left(\dfrac{1}{2e}\right)^i$ est absolument convergente et donc la série de fonctions de terme général $c_i f^i$, $i \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $]-R, R[$. Enfin, pour $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i f^i(x) = g(f(x) = x = \phi(x).$$

4. Soit $n \geqslant 1$. Comme à la question précédente, pour $i \geqslant n$,

$$\sup\{|c_i f^{i-n}(x)|,\ x \in]-R,R[\} \leqslant |c_i|\left(\frac{1}{2e}\right)^{i-n} = (2e)^n|c_i|\left(\frac{1}{2e}\right)^i$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente, et donc la série de fonctions de terme général $c_i f^{i-n}$, $i \geqslant n$, converge normalement sur $]-R, R[$. On note que pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}(x) = \frac{1}{f^n(x)}\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^i(x) = \frac{x - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i(x)}{x^n e^{nx}}.$$

5. **(a)** Comme dans les deux questions précédentes, la série de fonctions de terme général $c_i f^i$, $i \geqslant n$, converge normalement sur $]-R, R[$ vers la fonction $\phi - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i$.On sait que chaque f^i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, est développable en série entière sur $]-R, R[$ et donc la fonction $\phi - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i$ est développable en série entière sur $]-R, R[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$.

(b) Soit $n \geqslant 1$.

• Soit $U(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i x^i$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. On sait qu'en particulier U admet en 0 un développement limité d'ordre n :

$$U(x) \underset{x\to 0}{=} \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_{n-1}x^{n-1} + \gamma_n x^n + o(x^n),$$

et donc aussi

$$\frac{U(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{=} \frac{\gamma_0}{x^n} + \frac{\gamma_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{\gamma_{n-1}}{x} + \gamma_n + o(1).$$

Maintenant, si les des γ_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, est non nul, on peut considérer $i_0 = \text{Min}\{i \in [\![0, n-1]\!],\ \gamma_i \neq 0\}$. On a alors

$$\frac{U(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\gamma_{i_0}}{x^{n-i_0}},$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{U(x)}{x^n}\right| = +\infty$. Par contraposition, si $\frac{U(x)}{x^n}$ a une limite finie, alors $\gamma_0 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$.

• D'après la question V.B.4), la série de fonctions de terme général $c_i f^{i-n}$, $i \geqslant n$, converge normalement sur $]-R, R[$.

• On pose $U = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} c_i f^i$ puis $V = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$ de sorte que $U = f^n V$ ou encore pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $V(x) = \frac{U(x)}{f^n(x)}$.
D'après la question V.B.5)a), U est développable en série entière sur $]-R, R[$. De plus, puisque la série de fonctions de terme général $c_i f^{i-n}$, $i \geqslant n$, converge normalement vers V sur $]-R, R[$ et que chaque fonction $c_i f^{i-n}$, $i \geqslant n$, est continue sur $]-R, R[$, V est continue sur $]-R, R[$ et en particulier continue en 0. Comme $f^n(x) = x^n e^{nx} \underset{x\to 0}{\sim} x^n$, on a encore

$$V(x) = \frac{U(x)}{f^n(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{U(x)}{x^n},$$

et donc $\frac{U(x)}{x^n}$ tend vers $V(0)$ quand x tend vers 0. En particulier, $\frac{U(x)}{x^n}$ a une limite finie en 0. D'après le lemme précedement établi, U admet un développement en série entière de la forme :

$$\forall x \in]-R, R[,\ U(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k,$$

On en déduit que pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$V(x) = \frac{1}{x^n e^{nx}} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-n)^i}{i!} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+n} x^j\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} \frac{(-n)^i}{i!} a_{j+n}\right) x^k,$$

(produit de Cauchy sur $]-R, R[$ de deux séries entières de rayons au moins égaux à R) ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de V en 0. Finalement V est développable en série entière sur $]-R, R[$.

(c) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel $x \in]-R, R[$, on sait que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i f^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i(x) + c_n f^n(x) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f^i(x)$$

Mais alors, pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, après multiplication des deux membres de cette égalité par $\frac{f'(x)}{f^{n+1}(x)}$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) + c_n \frac{f'(x)}{f(x)} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) = \frac{x f'(x)}{f^{n+1}(x)}$$

(d) Soit $n \geqslant 1$. Par linéarité de α_{-1}, on a alors

$$\alpha_{-1}\left(\frac{\Phi f'}{f^{n+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha_{-1}(f' f^{i-n-1}) + c_n \alpha_{-1}\left(\frac{f'}{f}\right) + \alpha_{-1}\left(f' \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f^{i-n-1}\right) \quad \text{(I)}.$$

Puisque la fonction $f' \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} c_i f^{i-n-1}$ est développable en série entière d'après la question V.B.5)b), $\alpha_{-1}\left(f' \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} c_i f^{i-n-1}\right) = 0$ d'après la question V.A.3). D'après la question V.A.5)b) et puisque $\mathcal{L}_R$ est un espace vectoriel, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, la fonction $-\frac{1}{(n-i)f^{n-i}}$ est dans $\mathcal{L}_R$. Mais alors, d'après la question V.A.4), sa dérivée, à savoir $f' f^{i-n-1}$ est dans $\mathcal{L}_R$ et de plus, $\alpha_{-1}(f' f^{i-n-1}) = 0$. Enfin, D'après la question V.A.5)a), $\alpha_{-1}\left(\frac{f'}{f}\right) = 1$. L'égalité (I) s'écrit alors plus simplement

$$c_n = \alpha_{-1}\left(\frac{\phi f'}{f^{n+1}}\right).$$

(e) Soit $n \geqslant 1$. $\left(\dfrac{\phi}{f^n}\right)' = \dfrac{\phi'}{f^n} - n\dfrac{\phi f'}{f^{n+1}} = \dfrac{1}{f^n} - n\dfrac{\phi f'}{f^{n+1}}$. Puisque $\dfrac{\phi}{f^n}$ est dans $\mathcal{L}_R$, la question V.A.4) fournit

$$0 = \alpha_{-1}\left(\left(\frac{\phi}{f^n}\right)'\right) = \alpha_{-1}\left(\frac{1}{f^n}\right) - n\alpha_{-1}\left(\frac{\phi f'}{f^{n+1}}\right),$$

par linéarité de α_{-1} d'après la question V.A.3), et donc, d'après la question V.A.5)b),

$$c_n = \alpha_{-1}\left(\frac{\phi f'}{f^{n+1}}\right) = \alpha_{-1}\left(\frac{1}{nf^n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{(-n)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

6. Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n = -S(-x).$$

