Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice I

(1) Soit a une racine de P. $P((a+1)^2-1) = P((a+1)-1)P((a+1)+1) = P(a)P(a+2) = 0$ et $P((a-1)^2-1) = P((a-1)-1)P((a-1)+1) = P(a-2)P(a) = 0$.
Donc, si a est racine de P, alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi racines de P.

(2) **(a)** Soit a_0 une racine de P. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.
- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Si a_n est racine de P, alors $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n = (a_n+1)^2 - 1$ est racine de P.

Le résultat est démontré par récurrence.

(b) $a_0 > 0$ et si pour $n \geqslant 0$, $a_n > 0$, alors $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n > 0$.
Ceci montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + (a_n^2 + a_n) > a_n$ et donc la suite (a_n) est strictement croissante.

(c) Si a_0 est strictement positifs, alors la suite (a_n) est strictement croissante et en particulier, les réels a_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts et tous racines de P d'après la question **(2) (a)**. Le polynôme P admet dans ce cas une infinité de racines ce qui est impossible car $P \neq 0$. Donc, P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

(d) Si -1 est racine de P, alors $(-1-1)^2-1 = 3$ est également racine de P d'après la question **(1)**, mais ceci est impossible d'après la question précédente car 3 est un réel strictement positif. Donc, -1 n'est pas racine de P.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2$ et donc $a_n = \left(\left(\dots(a_0+1)^2\dots\right)^2\right)^2 = (a_0+1)^{2^n}$.

(3) Soit a une racine de P. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
D'après la question **(2) (d)**, on n'a pas $|a+1| = 0$.
Si $0 < |a+1| < 1$, la suite $(|a_n+1|) = (|a_0+1|^{2^n})$ est strictement décroissante. En particulier, les nombres $a_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts et il en est de même des nombres a_n, $n \in \mathbb{N}$. Puisque ces nombres sont tous racines de P, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui est impossible. Donc, on ne peut avoir $0 < |a_0+1| < 1$.
De même, on ne peut avoir $|a_0+1| > 1$ car alors la suite $(|a_n+1|) = (|a_0+1|^{2^n})$ est strictement croissante.

Finalement, on a nécessairement $|a+1| = |a_0+1| = 1$.

(4) Soit a une racine de P. D'après ce qui précède, nécessairement $|a-1| = |a+1| = 1$. En élévant au carré, on obtient $|a|^2 + (a+\overline{a}) = |a|^2 - (a+\overline{a}) = 0$ et en particulier $|a|^2 = -|a|^2$ puis $|a|^2 = 0$ puis $a = 0$.

(5) Si P est une constante λ, P est solution de $(*) \Leftrightarrow \lambda = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1\}$.
Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. D'après la question précédente, si P est solution de $(*)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = \lambda X^n$.
Réciproquement, si $P = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P \text{ solution de } (*) \Leftrightarrow \lambda(X^2-1)^n = \lambda^2(X-1)^n(X+1)^n \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (car } \lambda \neq 0.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (*) \text{ sont } 0 \text{ et les } X^n,\ n \in \mathbb{N}.}$$

Exercice II

Partie A

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$M(-t) = (\varphi(-t), -t\varphi(-t)) = (\varphi(t), -t\varphi(t)) = s_{(Ox)}(M(t)).$$

Donc, la partie de la courbe correspondant à $t \geqslant 0$ est la symétrique par rapport à (Ox) de la partie de la courbe correspondant à $t \geqslant 0$. En particulier, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

$M(0) = (-1, 0) = P$ et donc P est un élément de $\mathcal{C}$.

(2) Points doubles. Soient t et u deux réels tels que $t < u$.

$$\begin{aligned} M(t) = M(u) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{t^2-1}{t^2+1} = \dfrac{u^2-1}{u^2+1} \\ t\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = u\dfrac{u^2-1}{u^2+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t^2-1)(u^2+1) = (t^2+1)(u^2-1) \\ t(t^2-1)(u^2+1) = u(t^2+1)(u^2-1) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t^2u^2+t^2-u^2-1) = (t^2u^2-t^2+u^2-1) \\ t(t^2u^2+t^2-u^2-1) = u(t^2u^2-t^2+u^2-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = -t \\ 2t(t^4-1) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{car } t \neq u) \\ &\Leftrightarrow t \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } u = -t \Leftrightarrow t = -1 \text{ et } u = 1 \ (\text{car} t < u). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ admet un point double : $M(-1) = M(1) = O$.

Pour tout réel t,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \left(\frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}, \frac{(3t^2-1)(t^2+1) - 2t(t^3-t)}{(t^2+1)^2} \right) = \left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2} \right).$$

Puis $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow t = t^4 - t^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible car 0 n'est pas solution de l'équation $t^4 - t^2 + 1 = 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de point stationnaire ou encore la courbe $\mathcal{C}$ est régulière.

Branches infinies. $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

(3) Variations conjointes de x et y. On étudie x et y sur $[0, +\infty[$.

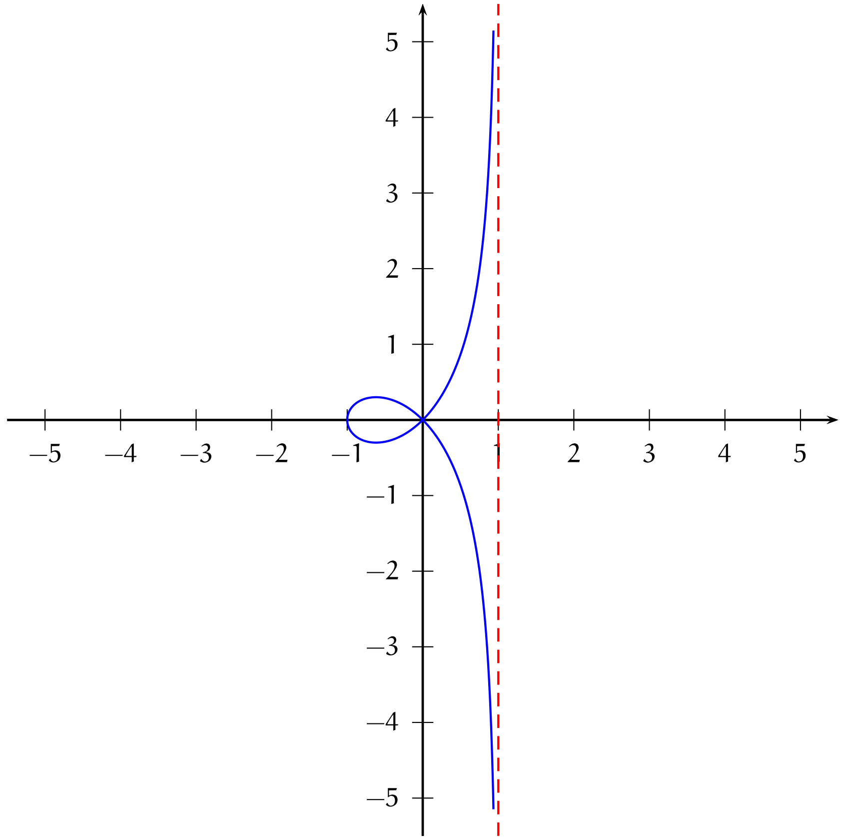
Pour tout réel positift, $x'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ est du signe de t. D'autre part,

$$y'(t) = \frac{(t^2+2)^2 - 5}{(t^2+1)^2} = \frac{(t^2+2+\sqrt{5})(t^2+2-\sqrt{5})}{(t^2+1)^2} = \frac{\left(t^2+2+\sqrt{5}\right)\left(t+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(t-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{(t^2+1)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations de x et y sur $[0, +\infty[$.

t	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$+\infty$
$x'(t)$	0		$+$		
x	-1		$\nearrow$		1
y	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

Courbe.



Partie B

(1) **(a)** On note L_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, les deux lignes du déterminant. On effectue la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant et on obtient

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ (a-b)\varphi(b) & (a-t)\varphi(t) \end{vmatrix}.$$

(b) Par suite,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{b^2-1}{b^2+1} & \dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ (a-b)\dfrac{b^2-1}{b^2+1} & (a-t)\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-2b^2+2a^2}{(a^2+1)(b^2+1)} & \dfrac{-2t^2+2a^2}{(a^2+1)(t^2+1)} \\ (a-b)\dfrac{b^2-1}{b^2+1} & (a-t)\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a-b)(a-t)}{(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} \dfrac{2(a+b)}{a^2+1} & \dfrac{2(a+t)}{a^2+1} \\ b^2-1 & t^2-1 \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à chaque colonne)} \\
&= \frac{2(a-b)(a-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} a+b & a+t \\ b^2-1 & t^2-1 \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à } L_1\text{)} \\
&= \frac{2(a-b)(a-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} b-t & a+t \\ b^2-t^2 & t^2-1 \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à la } C_1\text{)}
\end{aligned}$$

(2) **(a)** Tout d'abord, puisque $a+b \neq 0$, $(a,b) \notin \{(-1,1),(1,-1)\}$ et donc $A \neq B$ d'après la question A.(2) (et puisque d'autre part $a \neq b$). Par suite, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite (AB).

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
M(t) \in (AB) &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{M(t)A}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi(a) - \varphi(b) & \varphi(a) - \varphi(t) \\ a\varphi(a) - b\varphi(b) & a\varphi(a) - t\varphi(t) \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (d'après la question précédente)} \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } t = a \text{ ou } t = b \\
&\Leftrightarrow -t(a+b) - ab - 1 = 0 \text{ ou } t = a \text{ ou } t = b \\
&\Leftrightarrow t \in \{a, b, h(a, b)\}.
\end{aligned}
$$

Ceci montre que la droite (AB) recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $M(h(a, b)) = A \star B$.

$A \star B = O \Leftrightarrow h(a, b) \in \{-1, 1\}$. Or,

$$h(a, b) - 1 = -\frac{1 + ab}{a + b} - 1 = -\frac{(1 + a)(1 + b)}{a + b}.$$

Par suite, $h(a, b) = 1 \Leftrightarrow a = -1$ ou $b = -1 \Rightarrow A = O$ ou $B = O$. Par contraposition, $A \neq O$ et $B \neq O \Rightarrow h(a, b) \neq 1$.
De même, $h(a, b) + 1 = -\dfrac{1 + ab}{a + b} + 1 = -\dfrac{(1 - a)(1 - b)}{a + b} \neq 0$ et finalement $h(a, b) \notin \{-1, 1\}$ ou encore $A \star B \neq O$.

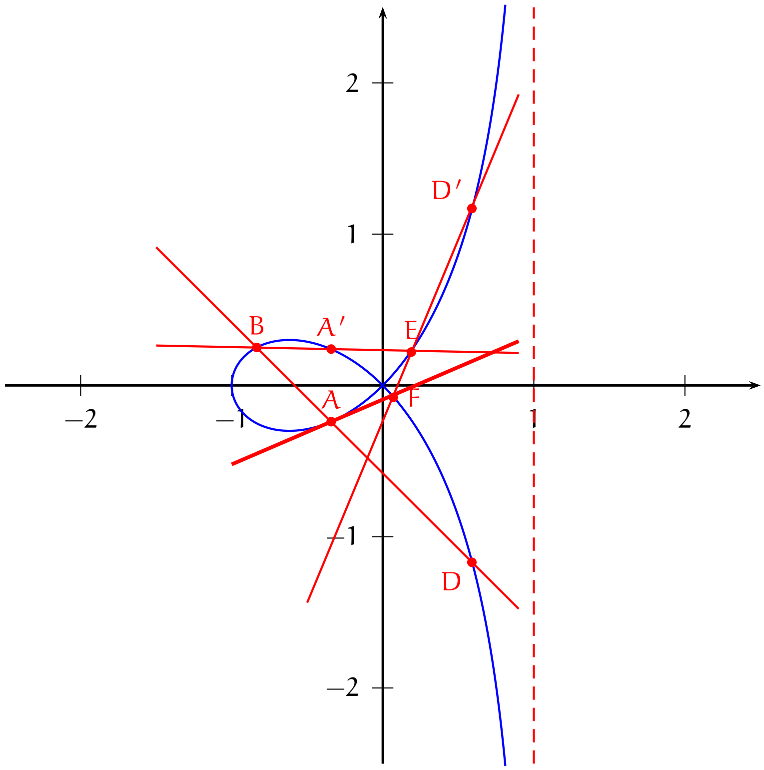
(b) $A \star A$ est défini si et seulement si $a \neq 0$ ce qui est le cas car $A \neq P$.
Dans ce cas, quand b tend vers a, la droite (Ab) tend vers la tangente à $\mathcal{C}$ en A et $A \star B$ tend vers $A \star A$ par continuité de la fonction $x \mapsto h(a, x)$ en a. La tangente à $\mathcal{C}$ en A recoupe donc $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star A$.

Pour $a \neq 0$, $h(a, a) = -\dfrac{1 + a^2}{2a} \neq 0$ et donc $A \star A \neq P$. D'autre part, $h(a, a) - 1 = -\dfrac{(1 + a)^2}{2a} \neq 0$ (car si $a = -1$, $A = O$ et en particulier A et A sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses). Donc $h(a, a) \neq 1$. De même, $h(a, a) \neq -1$ et finalement $A \star A \neq O$.

(3) D est le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $h(a, b)$.
A' est le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $-a$ et donc E est le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $h(-a, b)$.
D' est le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $-h(a, b)$ et donc F est le point de $\mathcal{C}$ de paramètre

$$
\begin{aligned}
h(-h(a, b), h(-a, b)) &= -\frac{1 - h(a, b)h(-a, b)}{-h(a, b) + h(-a, b)} = -\frac{1 - \dfrac{1 + ab}{a + b}\dfrac{1 - ab}{-a + b}}{\dfrac{1 + ab}{a + b} - \dfrac{1 - ab}{-a + b}} = -\frac{b^2 - a^2 - 1 + a^2b^2}{-2a + 2ab^2} = -\frac{(b^2 - 1)(1 + a^2)}{2a(b^2 - 1)} \\
&= -\frac{1 + a^2}{2a} = h(a, a).
\end{aligned}
$$

Le point F est donc le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $h(a, a)$ ou encore $F = A \star A$. D'après la question précédente, la droite (FA) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Voir figure page suivante.



Exercice III

Partie A

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, $u_n(t)$ et $v_n(t)$ existent. De plus, $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\pi^2n^2} > 0$ et $v_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\pi^2n^2} > 0$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{4\pi^2n^2}$ converge, on en déduit que les séries numériques de termes généraux respectifs $u_n(t)$ et $v_n(t)$ convergent.

Ainsi, pour tout réel t, les séries numériques de termes généraux respectifs $u_n(t)$ et $v_n(t)$ convergent ou encore les séries de fonctions de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) **(a)** Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall t \in [-a, a],\ t + 2n\pi \geqslant 0 \Leftrightarrow -a + 2n\pi \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{a}{2\pi}.$$

Soit $N = E\left(\dfrac{a}{2\pi}\right) + 1 \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant N$, on a $n \geqslant \dfrac{a}{2\pi}$ et donc $\forall t \in [-a, a],\ t + 2n\pi \geqslant 0$. Mais alors la fonction $t \mapsto (t + 2n\pi)^2$ est strictement croissante sur $[-a, a]$ puis la fonction $|u_n|\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{1 + (t + 2n\pi)^2} =$ est strictement décroissante sur $[-a, a]$. On en déduit encore que $\sup\limits_{t\in[-a,a]}|u_n(t)| = u_n(-a)$.

On a montré qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\sup\limits_{t\in[-a,a]}|u_n(t)| = u_n(-a)$.

(b) Soit $a > 0$. Chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie et bornée sur $[-a, a]$ (car continue sur le segment $[-a, a]$. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\sup\limits_{t\in[-a,a]}|u_n(t)| = u_n(-a)$. Puisque la série numérique de terme général $u_n(-a)$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, est normalement convergente sur $[-a, a]$ et donc uniformément convergente sur $[-a, a]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t de $[-a, a]$, $u'_n(t) = -\dfrac{2(t + 2n\pi)}{(1 + (t + 2n\pi)^2)^2}$. On note que la fonction u'_n est bornée sur $[-a, a]$ car la fonction u'_n est continue sur le segment $[-a, a]$.

Pour $n \geqslant N$ et $t \in [-a, a]$

$$|u_n'(t)| = \frac{2(t+2n\pi)}{(1+(t+2n\pi)^2)^2} \leqslant 2(a+2n\pi)(u_n(-a))^2 = \frac{2(a+2n\pi)}{(1+(a+2n\pi)^2)^2}.$$

En résumé, pour $n \geqslant N$, $\sup_{t\in[-a,a]} |u_n'(t)| \leqslant \frac{2(a+2n\pi)}{(1+(a+2n\pi)^2)^2}$. Or, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{2(a+2n\pi)}{(1+(a+2n\pi)^2)^2} \sim \frac{1}{4n^3\pi^3} > 0$ et donc la série numérique de terme général $\frac{2(a+2n\pi)}{(1+(a+2n\pi)^2)^2}$ converge. On en déduit que la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-a,a]$.

(3) **(a)** Soit $a > 0$.

- La série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $[-a,a]$.
- Chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$.
- La série de fonctions de terme général u_n', $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur $[-a,a]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De même, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et finalement la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(-t) &= \frac{1}{1+(-t)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(-t+2n\pi)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(-t-2n\pi)^2} \\
&= \frac{1}{1+t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t-2n\pi)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+2n\pi)^2} \\
&= F(t).
\end{aligned}$$

Donc F est paire.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(t+2\pi) &= \frac{1}{1+(t+2\pi)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+2\pi(n+1))^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t-2\pi(n-1))^2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+2\pi(n+1))^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t-2\pi(n-1))^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} \\
&= \frac{1}{1+t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} \\
&= F(t).
\end{aligned}$$

Donc F est 2π-périodique.

Partie B

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n(x) = \cos(kx)u_n(x)$.
Pour tout $x \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|w_n(x)| \leqslant |u_n(x)|$ et donc $\sup_{x\in[0,\pi]} |w_n(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,\pi]} |u_n(x)| \leqslant \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |u_n(x)|$. Comme la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-\pi,\pi]$, on en déduit que la série de fonctions de terme général w_n converge normalement et donc uniformément sur $[0,\pi]$. De même, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \cos(kx)v_n(x)$ converge uniformément sur $[0,\pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\ dx &= \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(kx)}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\right)\ dx\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+x^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\ dx\end{aligned}$$

F est paire. Par suite, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $b_k(F)=0$ et pour $k\in\mathbb{N}$,

$$a_k(F)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos(kx)\ dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+x^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\ dx\right)$$

(2) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de F converge vers F sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel t,

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos(kt),$$

où $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k=\dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+x^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\ dx\right)$.

(3) **(a)** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction $s\mapsto\dfrac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est majorée en valeur absolue par la fonction $s\mapsto\dfrac{1}{1+s^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $s\mapsto\dfrac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et en particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\ ds$ est convergente.

(b) Soit $(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. En posant $s=x+2n\pi$, on obtient

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\ dx=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(ks-2nk\pi)}{1+s^2}\ ds=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds.$$

De même, en posant $r=2n\pi-x$, on obtient

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\ dx=\int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}\frac{\cos(2nk\pi-kr)}{1+r^2}\ (-dr)=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\frac{\cos(kr)}{1+r^2}\ dr.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)\ \text{(somme de deux séries convergentes)}\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\lim_{N\to+\infty}\int_{\pi}^{(2N+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds+\int_{\pi}^{(2N+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^{(2N+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\ ds.}$$

Partie C

(1) Soit Φ : $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,s) & \mapsto & \dfrac{\cos(xs)}{1+s^2}\ ds \end{array}$ de sorte que $\forall x \in [0,+\infty[$, $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x,s)\ ds$.

• Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $s \mapsto \Phi(x,s)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question (3) (b) de la partie B.
• Pour chaque $s \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,s)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,s) \in [0,+\infty[^2$, $|\Phi(x,s)| = \dfrac{|\cos(xs)|}{1+s^2} \leqslant \dfrac{1}{1+s^2} = \varphi(s)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ϕ est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $|\phi(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xs)|}{1+s^2}\ ds \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\ ds = [\text{Arctan}\, s]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Par suite, ϕ est bornée sur $[0,+\infty[$.

Enfin, $\phi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\ ds = \frac{\pi}{2}$.

(2) **(a)** Soit $x > 0$. L'application $s \mapsto xs = t$ est un C^1-difféomorphisme de $[0,+\infty[$ sur lui-même. On peut donc poser $t = xs$ et on obtient

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{1+s^2}\ ds = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+\dfrac{t^2}{x^2}}\ \frac{dt}{x} = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\ dt.$$

(b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ puis G : $\begin{array}{ccc} [a,b]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\cos(t)}{x^2+t^2} \end{array}$ de sorte que $\forall x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} G(x,t)\ dt$.

• Pour chaque $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. De plus, pour chaque $(x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[$, $|G(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{a^2+t^2} = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car φ_0 dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).
• G admet sur $[a,b]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sé première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \frac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\ dt.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{(a^2+t^2)^2} = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car φ_1 dominée par $\dfrac{1}{t^4}$ en $+\infty$).

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\ dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\ dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Par suite, ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\ dt + x\int_0^{+\infty} \frac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\ dt = \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\ dt$$

(c) En posant $t = xs$, on obtient

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{(x^2+x^2s^2)^2}\,x\,ds\\ &= \frac{1}{x}\phi(x) - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds.\end{aligned}$$

(3) **(a)** On pose $H : \begin{array}{ccc}[0,+\infty[^2 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,s) & \mapsto & \dfrac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\end{array}$. Comme à la question (3) (b), les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées sur $[0,+\infty[^2$ car pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[^2$, $|H(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{(1+s^2)^2} = \varphi_0(s)$ et $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,s)\right| = \left|\dfrac{-2s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{2s}{(1+s^2)^2} = \varphi_1(s)$ où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds$ est donc dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme.

Donc ψ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et en particulier sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\psi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\,ds$.
Soit alors $A > 0$.
Les deux fonctions $s \mapsto \sin(xs)$ et $s \mapsto -\dfrac{1}{1+s^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A\frac{2s}{(1+s^2)^2}\sin(xs)\,ds = \left[-\frac{1}{1+s^2}\sin(xs)\right]_0^A + x\int_0^A\frac{\cos(xs)}{1+s^2}\,ds = -\frac{\sin(xA)}{1+A^2} + x\int_0^A\frac{\cos(xs)}{1+s^2}\,ds.$$

Pour tout réel $A > 0$, $\left|-\dfrac{\sin(xA)}{1+A^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+A^2}$ et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{\sin(xA)}{1+A^2} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\psi'(x) = x\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{1+s^2}\,ds = x\phi(x).$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x}\phi(x) + \dfrac{1}{x}\psi(x)$. Puisque ϕ et ψ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, il en est de même de ϕ' ou encore ϕ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\phi''(x) = -\frac{1}{x^2}(\phi(x)+\psi(x)) + \frac{1}{x}(\phi'(x)+\psi'(x)) = -\frac{1}{x}\phi'(x) + \frac{1}{x}(\phi'(x)+x\phi(x)) = \phi(x).$$

(4) D'après la question précédente, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $\phi(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$. Cette égalité reste vrai pouyr $x = 0$ par continuioté de ϕ en 0. ϕ est bornée sur $[0,+\infty[$ et donc $\lambda = 0$. Ensuite, pour $x = 0$, on obtient $\mu = \phi(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\forall x \geqslant 0$, $\phi(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2}{\pi}\phi(k) = e^{-k}.$$

(5) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos(kt) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}e^{-k}\cos(kt) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}e^{(-1+it)k}\right)\\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-1+it}}{1-e^{-1+it}}\right)\ (\text{car } |e^{-1+it}| = e^{-1} < 1)\\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-1+it}(1-e^{-1-it})}{(1-e^{-1+it})(1-e^{-1-it})}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-1+it}-e^{-2}}{1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-1}\cos(t)-e^{-2}}{1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2}}\\ &= \frac{(1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2}) + 2(e^{-1}\cos(t)-e^{-2})}{2(1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2})} = \frac{1-e^{-2}}{2(1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2})}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \frac{1-e^{-2}}{2(1-2e^{-1}\cos(t)+e^{-2})}.}$$

