11PC06

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Les quatre parties sont très largement indépendantes.

- Dans tout le problème :

  * f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

  * F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

  * $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

  * pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires.

1) Etude de f :

   a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative $\left(C_f\right)$.

   b) $\left(C_f\right)$ possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

   c) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f.

   d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k\in\{1,\ldots,8\}$. Enoncer avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).

2) Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

   d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

3) Etude d'une intégrale impropre :

   a) Justifier l'existence de F . Enoncer avec précision le théorème utilisé.

   b) Justifier l'existence de α .

   c) Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).

   d) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.

   e) i) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

   ii) Montrer que $\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha+1$.

Partie II : Intégrales de Wallis.

Dans cette partie si $n\in\mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\, dt$.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n > 0$.

4) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.

5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par parties).

6) Montrer que la suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).

7) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.

8) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $1\leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.

   b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

   c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

9) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \le a_n \le \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ quand n tend vers +∞.

c) Donner la nature des séries de terme général :

i) a_n ii) $\dfrac{a_n}{4n+1}$ iii) $(-1)^n a_n$ iv) $\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$

Partie III : Etude de F.

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

1) Etude globale de F :
   a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   b) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que F est impaire.
   d) Montrer que pour tout $x \ge 1$, $F(x) - F(1) \le 1 - \dfrac{1}{x}$.
   e) Enoncer le théorème concernant l'existence de la limite en +∞ d'une fonction croissante définie sur [A,+ ∞[(où A∈ℝ).
   f) Déduire des 2 questions précédentes que F a une limite finie en +∞.

2) Etude locale de F :
   a) Donner le développement limité de F en 0 à l'ordre 9. Enoncer le théorème utilisé.
   b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.
   c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

3) Lien avec α :
   a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   b) En déduire que la limite de F en +∞ est égale à $2F(1)$.
   c) En utilisant la partie I)3), montrer que la limite de F en +∞ est α et retrouver le résultat de III)3)b).

4) Tracé de (C) :
   a) Dresser le tableau de variations de F.
   b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
   c) Tracer (C) en tenant compte des différents points de l'étude précédente. Pour le tracé, prendre $\alpha \approx 1.85$.

5) Quelques applications de F :
   a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+t^4)y' + 2t^3 y = 1$.
   b) On considère la courbe paramétrée : $(\Gamma)\ \begin{cases} x(t) = F(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.
      i) Montrer que l'étude de (Γ) peut être restreinte à]0,+∞[. Préciser alors les symétries de (Γ).
      ii) Dresser le tableau de variations de (Γ).
      iii) Déterminer de manière précise le comportement de (Γ) quand t tend vers +∞.
      iv) Tracer la courbe (Γ).

c) On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 F(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{cases}$.

i) Montrer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les trois inégalités suivantes :

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad 0 \leq f(xy) \leq 1 \qquad |F(xy)| \leq |xy|$$

ii) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$.

iv) φ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Partie IV : Développement en série entière de F et utilisation.

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de la question II)9)b) : a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

1) Etude de h :
   a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.
   b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.
   c) Enoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon R>0 sur le segment [0,R] et en déduire que h est continue sur [-1,1].
   d) i) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ est normalement convergente sur [-1,1].
   ii) Retrouver le résultat de IV)1)c). Enoncer le théorème utilisé.

2) Développement en série entière de F :
   a) Rappeler, si $\beta \in \mathbb{R}$, le développement en série entière de la fonction b définie par $b(x) = (1+x)^\beta$. Sur quel intervalle ce développement est-il valable ?
   b) En déduire que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.
   c) Montrer que pour tout $x \in$[-1,1] : $F(x) = h(x)$ (on pourra utiliser IV)1)c)).
   d) En déduire que $\alpha = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α :
   Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p^ième^ somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ soit $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.
   a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.
   b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{3/2}}$ (utiliser II)9)a)).
   c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.