11MPO2

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice I :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté $\mathcal{X}_A$, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.

On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, qui commutent avec la matrice A.

On suppose dans tout cet exercice que : $\mathcal{X}_A = P_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

   a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

   b) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.

   c) Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases}$$

   où a, b, c sont les valeurs propres de la matrice B.

   d) En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité :

$$B = T(A).$$

   e) En déduire le commutant de la matrice A.

2) On suppose, dans cette question, qu' il existe un nombre complexe λ tel que : $P_A = (X-\lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$, tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

a) Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est à dire vérifiant les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

c) Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$ où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$H = Q(A).$$

e) En déduire le commutant de la matrice A.

3) On suppose, dans cette question, qu' il existe deux nombres complexes distincts, λ_1 et λ_2 tels que :

$$P_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2.$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2.$$

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$

c) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

α) Montrer que :

$$\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$$

β) Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

γ) Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X-\lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}$

δ) En déduire que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

d) Déterminer le commutant de la matrice A.

Exercice II :

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, on donne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
La fonction cosinus hyberbolique est notée ch, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On admet l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

1) Pour tout $x \in \left]0, 2\pi\right[$, on note $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x}$.

a) Montrer que l 'application $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x}$ est bornée sur $\left]0, 2\pi\right[$.

b) Montrer que l'application $t \mapsto \left| \dfrac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ définie sur $\left]0, 1\right]$, est prolongeable par continuité en 0.

c) En déduire que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x}$ est bornée sur $\left]0, 2\pi\right[$.

d) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x}$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{(2(1-\cos x))^{\frac{1}{4}}}$.
En déduire un équivalent de l'intégrale $I(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

3) Pour tout entier N supérieur ou égal à 1 et pour tout réel x, on note : $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

a) Calculer, pour tous réels x et t, la somme $\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}\sin nx$. (On pourra remarquer que $e^{-nt}\sin nx$ est la partie imaginaire du nombre complexe $e^{(-t+ix)n}$)

b) En utilisant l'égalité, $S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}\sin nx}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, montrer que la suite $(S_N(x))$ est convergente pour tout x réel élément de $\left]0, 2\pi\right[$ et que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall x \in \left]0, 2\pi\right[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{ch(t^2) - \cos x}$$

4) En déduire un équivalent de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice III :

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, x, y, z)$.

1) Quelle est la nature de la quadrique d'équation $x^2 + z^2 = 1$ dans le repère $\mathcal{R}$?

2) On considère le solide $\mathcal{S}$ défini dans le repère $\mathcal{R}$, par les équations $x^2 + z^2 \leqslant 1$ et $y^2 + z^2 \leqslant 1$.

   a) Soit γ un nombre réel. Décrire précisément la nature géométrique de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = \gamma$, selon la valeur de γ.

   b) Déterminer le volume de $\mathcal{S}$.

3) Soit Σ la portion de surface définie dans le repère $\mathcal{R}$ par les équations :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2 + z^2 = k \\ y^2 + z^2 = k \\ (x, y, z, k) \in [0, 1]^4 \end{array}\right.$$

   Déterminer l'aire de Σ.

FIN DE L'EPREUVE