Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Notations

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1-t)/t & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Soit S la série entière :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

Partie I

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière S.
2. Démontrer l'égalité $f(t) + S(t) = 0$, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $]-1, 1[$.
3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.
4. Déterminer le signe de $f(t)$, selon la valeur du nombre réel t dans $]-\infty, 1[$.

Partie II

Soit L la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par :

$$L(x) = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$.
2. Démontrer que la fonction L admet un prolongement par continuité à gauche au point 1.
3. Justifier que la fonction L est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.
4. Démontrer que la fonction L admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$; on énoncera explicitement le théorème utilisé. Expliciter les coefficients de ce développement.
5. Soit x dans l'intervalle $]-1, 1[$. Démontrer la relation :

   $$L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

   Cette relation est-elle vérifiée pour $x = 1$?
6. Justifier l'égalité :

   $$L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Partie III

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'application qui envoie un entier m sur l'entier $m + 2^{n-1}$ induit une bijection de l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ sur l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 2^{n-1} et $2^n - 1$.

2. Soit x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer l'égalité :
$$\frac{4}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}.$$

3. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :
$$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

4. On se propose de démontrer l'égalité :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

   (a) Démontrer, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$:
   $$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

   (b) Démontrer qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que tout entier naturel n non nul et tout entier naturel k compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ vérifient l'inégalité :
   $$\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leqslant \frac{C}{(2k+1)^2}.$$

   (c) Conclure.

5. En déduire la valeur de $L(1)$ et la valeur de $L(-1)$.

6. Démontrer, pour tout x dans l'intervalle $]0, 1[$, la relation :
$$L(1-x) = L(1) - \ln(x)\ln(1-x) - L(x).$$

7. En déduire une expression de $L(\frac{1}{2})$ en fonction de π et de $\ln 2$.

8. En déduire en fonction de π la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{\ln 2} \frac{t}{1-e^{-t}}\, \mathrm{dt}.$$

Partie IV

1. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $L(x)$.
2. Quel est l'image de l'intervalle $]0,1[$ par la fonction h_1 qui envoie x sur $1-\dfrac{1}{x}$?
3. Soit h_2 la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $h_2(x) = L(1-x) + L(1-\frac{1}{x})$.
   (a) Après avoir justifié que la fonction h_2 est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$, calculer la dérivée de h_2.
   (b) En déduire, pour tout x dans l'intervalle $]0,1[$, la relation
   $$L(1-x) + L(1-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2}\ln^2(x).$$
4. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\dfrac{L(x)}{x}$.
5. Quelle est la nature de la branche infinie de L en $-\infty$?
6. Représenter le graphe de la fonction L sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

Partie V

Soit J un intervalle contenu dans $]-\infty,0[\cup]0,1[$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_J) \qquad\qquad (1-x)xy' + (1-x)y = 1.$$

1. Résoudre sur l'intervalle J l'équation homogène associée. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?
2. En déduire les solutions sur l'intervalle J de l'équation $(\mathcal{E}_J)$.

Soit alors $(\mathcal{F}_J)$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{F}_J) \qquad\qquad (1-x)xy'' + (1-x)y' = 1.$$

3. Démontrer que les solutions sur l'intervalle J de $(\mathcal{F}_J)$ sont les fonctions g de la forme $g(t) = L(t) + A\ln|t| + B$, où A et B sont des constantes.
4. Peut-on trouver des solutions de l'équation différentielle $(1-x)xy'' + (1-x)y' = 1$ sur l'intervalle $]-\infty,1[$? Si oui, les décrire. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?

FIN DE L'EPREUVE