Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice I

Partie A

(1) **(a)** La matrice $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Par suite, $\det\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = 1^n = 1$.
En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} = 1 \times \det\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,n} \\ 0_{n,n-1} & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,n} \\ 0_{n,n-1} & D \end{pmatrix}.$$

En réitérant, on obtient $\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} = 1^n \times \det(D) = \det(D)$. De même, $\det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$.

(b) Un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$.
Par suite,

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D).$$

(c) D'après la question précédente,

$$\det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det{}^t\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det{}^t\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0_n & {}^tD \end{pmatrix} = \det({}^tA) \times \det({}^tC) = \det(A) \times \det(C).$$

(2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$ car les matrices C et D commutent. Par suite,

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det D = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \times \det(D).$$

Enfin, D est inversible et donc $\det(D) \neq 0$. Après simplification par $\det(D)$, on obtient $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

$$\boxed{\text{Si } C \text{ et } D \text{ commutent et } D \text{ est inversible, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).}$$

(3) **(a)** Puisque C commute avec D et I_n, pour tout complexe x, C et D_x commutent.
Si x n'est pas une valeur propre de D, D_x est inversible et d'après la question précédente $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.
Comme D admet un nombre fini de valeur propre, il existe S sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$ (à savoir $S = \mathrm{Sp}(D)$) tel que $\forall x \in \mathbb{C}\setminus S$, $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

(b) Les fonctions $x \mapsto \det(M_x)$ et $x \mapsto \det(AD_x - BC)$ sont polynomiales et coïncident en une infinité de valeurs de x. On en déduit que ces fonctions sont égales et en particulier prennent la même valeur en 0. Pour $x = 0$, on obtient $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

$$\boxed{\text{Si } C \text{ et } D \text{ commutent, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

Partie B

(1) Soit $(i,j) \in \{1,2\}^2$. $\mathcal{R}_A(E_{i,j}) = (aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2})\,E_{i,j} = \begin{cases} aE_{1,j} + cE_{2,j} \text{ si } i = 1 \\ bE_{1,j} + dE_{2,j} \text{ si } i = 2 \end{cases}$. Donc la matrice de $\mathcal{R}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix}.}$$

De même, $\mathcal{L}_A(E_{i,j}) = E_{i,j}\,(aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2}) = \begin{cases} aE_{i,1} + bE_{i,2} \text{ si } j = 1 \\ cE_{i,1} + dE_{i,2} \text{ si } j = 2 \end{cases}$. Donc la matrice de $\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}_A) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & 0_2 \\ 0_2 & {}^tA \end{pmatrix}.}$$

(2) Par suite,

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\},\ M_A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A) = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}.}$$

(3) **(a)** On sait que $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)I_2$. Puisque les matrices bI_2 et $dI_2 - q\,{}^tA$ commutent, la partie A permet d'écrire

$$\begin{aligned}\det(M_A) &= \det((aI_2 - q\,{}^tA)(dI_2 - q\,{}^tA) - bcI_2) = \det((ad - bc)I_2 + q^2({}^tA^2) - q(a + d)\,{}^tA) \\ &= \det{}^t((ad - bc)I_2 + q^2({}^tA^2) - q(a + d)\,{}^tA) = \det((ad - bc)I_2 + q^2A^2 - q(a + d)A) \\ &= \det(A\widetilde{A} + q^2A^2 - q(a + d)A) = \det(A)\det(\widetilde{A} + q^2A^- q(a + d)I_2),\end{aligned}$$

(b) puis

$$\begin{aligned}\det(M_A) &= \det(A)\det\begin{pmatrix} d + q^2a - q(a + d) & -b + q^2b \\ -c + q^2c & a + q^2d - q(a + d) \end{pmatrix} \\ &= \det(A)\det\begin{pmatrix} (1 - q)(d - qa) & -(1 - q)(1 + q)b \\ -(1 - q)(1 + q)c & (1 - q)(a - qd) \end{pmatrix} \\ &= (1 - q)^2\det(A)\det\begin{pmatrix} (d - qa) & -(1 + q)b \\ -(1 + q)c & (a - qd) \end{pmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à chaque colonne).}\end{aligned}$$

(c) et enfin

$$\begin{aligned}\det(M_A) &= (1 - q)^2\det(A)(ad - q(a^2 + d^2) + q^2ad - (1 + q)^2bc) \\ &= (1 - q)^2\det(A)(-q(a^2 + 2ad + d^2) + (q^2 + 2q + 1)ad - (1 + q)^2bc) \\ &= (1 - q)^2\det(A)(-q(a + d)^2 + (1 + q)^2(ad - bc)) = (1 - q)^2\det(A)(+(1 + q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2).\end{aligned}$$

(4) **(a)** On sait que $\mathrm{Tr}(A) = \alpha + \beta$, $\det(A) = \alpha\beta$. Donc

$$\begin{aligned}\det(M_A) &= (q - 1)^2\alpha\beta((1 + q)^2\alpha\beta - q(\alpha + \beta)^2) = (q\alpha - \alpha)(q\beta - \beta)(q^2\alpha\beta - q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta \\ &= (q\alpha - \alpha)(q\beta - \beta)(q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta).\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

(b)

$$\begin{aligned}\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\} / \ AB = qBA &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\} / \ (\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A)(B) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A) \Leftrightarrow \det(M_A) = 0 \Leftrightarrow P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow (q-1)^2\alpha\beta(q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta = 0 \text{ ou } \alpha = q\beta \text{ ou} \beta = q\alpha \text{ (car } (q-1)^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \det(A) = 0 \text{ ou } \alpha = q\beta \text{ ou} \beta = q\alpha.\end{aligned}$$

(5) On suppose $A \neq 0$. D'après la question précédente, on a $\det(A) = 0$ ou $\beta = q\alpha$ ou $\alpha = q\beta$.

• Supposons $\det(A) \neq 0$. Alors $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\beta = q\alpha$ ou $\alpha = q\beta$. Quite à échanger les noms des deux valeurs propres, on supposera $\beta = q\alpha$.
Dans ce cas, A admet les deux valeurs propres $\alpha \neq 0$ et $q\alpha \neq 0$. De plus, $q\alpha \neq \alpha$ car $q\alpha = \alpha \Leftrightarrow (q-1)\alpha = 0 \Leftrightarrow q = 1$ ou $\alpha = 0$ ce qui n'est n'est pas. Ainsi, A admet deux valeurs propres distinctes à savoir α et $q\alpha$. On sait que A est diagonalisable et donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

• Supposons $\det(A) = 0$. Alors ou bien $\alpha = \beta = 0$ ou bien l'un des deux réels α ou β est nul et l'autre non.

1er cas Supposons $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ ou $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$. Quite à renommer les valeurs propres, on peut supposer que $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Dans ce cas encore, A a deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. Mais alors A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

2ème cas Supposons $\alpha = \beta = 0$. Alors $P_A = X^2$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = 0$. Comme $A \neq 0$, A est nilpotente d'indice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. $f \neq 0$ et donc il existe e_2 tel que $f(e_2) \neq 0$. Posons $e_1 = f(e_2)$. Puisque $f^2 = 0$, on a donc $f(e_1) = 0$.
Ainsi, e_1 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ et e_2 n'est pas $\mathrm{Ker}(f)$. Donc e_2 n'est pas colinéaire à e_1. Par suite, (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base, la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc A est semblable à cette matrice.

Exercice II

Partie A

(1) **(a)** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n existent et sont positifs. C'est vrai pour $n = 0$. Soit $n \geqslant 0$. Si $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ existent et sont positifs. On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ a_n \text{ et } b_n \text{ existent et sont positifs.}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n}^2 - 2\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{b_n}^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2.$$

(2) On en déduit que pour tout entier naturel n $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$ ou encore, pour tout entier naturel non nul n, $a_n \leqslant b_n$.
Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geqslant 0$ et $a_n - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.}$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(a_n - b_n) - (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = 2\sqrt{a_n b_n} - 2b_n = 2\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geqslant 0$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leqslant a_n - b_n.$$

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$ puis par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1) = \frac{1}{2^n}(1 - \sqrt{a})^2.$$

Enfin, $(1 - \sqrt{a})^2 = \dfrac{(1-a)^2}{(1+\sqrt{a})^2} = |1-a|\dfrac{|1-a|}{1 + 2\sqrt{a} + a} \leqslant |1-a|\dfrac{1+a}{1+a} = |1-a|$. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-a|.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

(4) Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît et la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. On en déduit que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et donc convergentes de même limite.

$$\boxed{\text{Les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent vers la même limite.}}$$

Partie B

(1) D'après la partie A, pour chaque $x \geqslant 0$, les deux suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ou encore, les suites de fonctions (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une certaine fonction f.

(2) **(a)** • $a_0(0) = 0$, $b_0(0) = 1$ puis $a_1(0) = \dfrac{1}{2}$ et $b_1(0) = 0$.
Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $b_n(0) = 0$. Alors, $b_{n+1}(0) = 0$. Ceci montre par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $b_n(0) = 0$. On en déduit que $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(0) = 0$.

• $a_0(1) = b_0(1) = 1$. Mais alors, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(1) = b_n(1)$. Par suite, $f(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(1) = 1$.

$$\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.}$$

(b) (erreur d'énoncé : l'encadrement est faux pour $x \in]0, 1[$)
Soit $x \geqslant 0$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $f(x)$ en croissant. On en déduit que $\sqrt{x} = b_1(x) \leqslant f(x)$.
Si de plus $x \geqslant 1$, $a_0(x) = x \geqslant \dfrac{1+x}{2} = a_1(x)$. Mais alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$ en décroissant. On en déduit que $f(x) \leqslant a_0(x) = x$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant \sqrt{x} \text{ et } \forall x \geqslant 1,\ \sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant x.}$$

(3) Soit $A > 0$. Pour $x \in [0, A]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n(x) \leqslant f(x) \leqslant a_n(x)$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, A]$, d'après la question (3)(a) de la partie A, on a

$$|a_n(x) - f(x)| \leqslant |a_n(x) - b_n(x)|\frac{1}{2^n}|1 - a_0(x)| = \frac{|1-x|}{2^n} \leqslant \frac{1+A}{2^n}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{Sup}\{|a_n(x) - f(x)|\ x \in [0, A]\} \leqslant \dfrac{1+A}{2^n}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Sup}\{|a_n(x) - f(x)|\ x \in [0, A]\} = 0$. On a montré que la suite de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0, A]$.
De même, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, A]$, $|b_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1+A}{2^n}$, la suite de fonctions $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0, A]$.

$$\boxed{\text{Les suites de fonctions } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent uniformément vers la fonction } f \text{ sur } [0, A].}$$

(4) Les fonctions a_0 et b_0 sont continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions a_n et b_n sont continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, alors les fonctions $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Ceci montre par récurrence que pour tout entier naturel n, les fonctions a_n et b_n sont continues sur $[0, +\infty[$.

Puisque la suite de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout segment $[0, A]$ de $[0, +\infty[$, la fonction f est continue sur tout segment $[0, A]$ de $[0, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

Partie C

(1) La fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\varphi(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$. Donc φ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ et finalement

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

(2) Soient $a > 0$ puis $A > a$. Posons $G\ :\ \begin{array}{ccc} [a, A] \times [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & G(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{(t^2 + x^2)(t^2 + 1)}}\, dt \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto G(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question (1) appliquée à $\alpha = x$ et $\beta = 1$.

• La fonction G admet sur $[a, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \times \frac{x}{(t^2 + x^2)^{3/2}}$$

De plus

- pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,
- pour chaque $(x, t) \in [a, A]$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \times \dfrac{x}{(x^2 + t^2)^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \times \dfrac{A}{(a^2 + t^2)^{3/2}} = \psi(t)$.

  De plus, la fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{A}{t^4}$. Par suite, la fonction ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de LEIBNIZ), la fonction g est de classe C^1 sur $[a, A]$. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

(3) **(a)** Soit $x > 0$. La fonction S_x est de continue sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. Par suite, S_x réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{t \to 0^+} S_x(t), \lim\limits_{t \to +\infty} S_x(t)\right[=] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$. De plus, S_x est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ S_x \text{ est une bijection de classe } C^1 \text{ de }]0, +\infty[\text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $x = \alpha\beta > 0$. Puisque S_x est une bijection de classe C_1 de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $s = S_{\alpha\beta}(t) = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\alpha\beta}{t}\right)$ et donc $ds = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\alpha\beta}{t^2}\right) dt$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2 + \alpha\beta)}}\, ds &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(t - \frac{\alpha\beta}{t}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)\left(\frac{1}{4}\left(t - \frac{\alpha\beta}{t}\right)^2 + \alpha\beta\right)}} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha\beta}{t^2}\right) dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + \alpha\beta}{\sqrt{\left((t^2 - \alpha\beta)^2 + t^2(\alpha+\beta)^2\right)\left((t^2 - \alpha\beta)^2 + 4t^2\alpha\beta\right)}}\, dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + \alpha\beta}{\sqrt{(t^4 + (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2)(t^4 + 2\alpha\beta t^2 + \alpha^2\beta^2)}}\, dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + \alpha\beta}{\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)(t^2 + \alpha\beta)^2}}\, dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}}\, dt.
\end{aligned}$$

(c) Puisque la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2 + \alpha\beta)}}$ est paire,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2 + \alpha\beta)}}\, ds = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2 + \alpha\beta)}}\, ds$ et on a donc montré que

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\boxed{\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(t^2 + \alpha\beta)}}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}\ dt.}$$

Partie D

(1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2(x))\,(t^2 + b_n^2(x))}}$.

• Puisque $\forall x > 0$, $a_0(x) = x$ et $b_0(x) = x$, la formule est vrai pour $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2(x))\,(t^2 + b_n^2(x))}}$. Alors d'après la question (3)(c) de la partie précédente, pour $x > 0$,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a_n(x)+b_n(x)}{2}\right)^2\right)(t^2 + a_n(x)b_n(x))}}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2 + a_{n+1}^2(x)\right)\left(t^2 + b_{n+1}^2(x)\right)}}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2(x))(t^2 + b_n^2(x))}}\ dt.}$$

(2) **(a)** Soit $x > 0$. Pour $t > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2 + f^2(x))(t^2 + f^2(x))}} = \frac{1}{t^2 + f^2(x)}$.

(b) Soit $x > 0$. Pour $n \geqslant 1$, $a_n^2(x) \geqslant b_n^2(x) \geqslant b_1^2(x) = x$ et donc pour $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,

$$0 < h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2(x))(t^2 + b_n^2(x))}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{(t^2 + x)(t^2 + x)}} = \frac{1}{t^2 + x}.$$

(c) Soit $x > 0$.

• Chaque fonction h_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

• D'après (a), la suite de fonctions h_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $h\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + f^2(x)}$. De plus, la fonction h est continue sur $[0, +\infty[$.

• D'après (b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, +\infty[$, $|h_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2 + x} = u(t)$ (hypothèse de domination). De plus, la fonction u est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{t^2}$. Donc la fonction u est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} h_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} h(t)\ dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + f^2(x)}\ dt \\
&= \left[\frac{1}{f(x)} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{f(x)}\right)\right]_0^{+\infty} \quad (\text{car } f(x) \geqslant \sqrt{x} > 0) \\
&= \frac{1}{f(x)}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2f(x)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\ dt = \frac{\pi}{2f(x)}.}$$

(d) D'autre part, d'après la question (1), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\ dt = g(x)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2f(x)}.}$$

En particulier, la fonction g ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ d'après la question (2) de la partie C. On en déduit que $f = \dfrac{\pi}{2g}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.