Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

Applications directes du cours

1. Soit $f \in E$. Si f est paire, alors pour tout réel x, $f(x) = f(-x)$. En dérivant cette égalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x)$ et donc f' est impaire.

2. Soit $f \in E$. Si f est impaire, alors pour tout réel x, $f(x) = -f(-x)$. En dérivant cette égalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(-x)$ et donc f' est paire.

3. **3.1** Soit $u \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H^2(u)(x) = u(-(-x)) = u(x),$$

et donc $\forall u \in E$, $H^2(u) = u$ ou encore $H^2 = Id_E$. Par suite, H est une symétrie de E.

3.2 On sait alors que $E = \mathrm{Ker}(H - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(H + Id_E)$. Maintenant, pour $u \in E$,

$$u \in \mathrm{Ker}(H - Id_E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u(-x) = u(x) \Leftrightarrow u \text{ est paire.}$$

De même, $u \in \mathrm{Ker}(u + Id_E) \Leftrightarrow u$ impaire. Ainsi, l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Ceci montre que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4. Supposons f' impaire. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) - f(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 0$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. On a montré que

$$\boxed{\forall f \in E,\ f' \text{ impaire} \Rightarrow f \text{ paire.}}$$

Maintenant, l'autre implication est fausse. Par exemple, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ alors $f'(x) = 1$. Dans ce cas, f' est paire mais f n'est pas impaire. Donc f' paire $\not\Rightarrow$ f impaire.

5. Soit $f \in E$. Notons p et i les parties paire et impaire de f. Alors, pour tout réel x

$$f''(x) + f(-x) = p''(x) + i''(x) + p(-x) + i(-x) = (p'' + p)(x) + (i'' - i)(x).$$

De plus, $p'' - p$ est paire et $i'' - i$ est impaire. Par unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on peut écrire

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = 1 + \sin(2x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (p'' + p)(x) + (i'' - i)(x) = 1 + \sin(2x)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ p''(x) + p(x) = 1 \text{ et } i''(x) - i(x) = \sin(2x).\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $y'' + y = 1$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + 1$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions paires de cette équation sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto 1 + a \cos x$, $a \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation $y'' - y = \sin(2x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \,\mathrm{ch}\, x + \mu \,\mathrm{sh}\, x - \frac{1}{5}\sin(2x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions impaires de cette équation sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{5}\sin(2x) + b \,\mathrm{sh}\, x$, $b \in \mathbb{R}$.

Les solutions du problème posé sont donc les fonctions de la forme $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{5}\sin(2x) + a \cos x + b \,\mathrm{sh}\, x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \mapsto 1 - \frac{1}{5}\sin(2x) + a\cos x + b\,\mathrm{sh}\, x,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Préliminaires

1. Soit $y \in E$. Alors $y'' \in E$ puis $\varphi(y) = y'' + \lambda y \in E$. Donc φ est bien une application de E dans E.
Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + \lambda(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(y_1'' + \lambda y_1) + \alpha_2(y_2'' + \lambda y_2) = \alpha_1 \varphi(y_1) + \alpha_2 \varphi(y_2).$$

Donc φ est linéaire et finalement

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(E).}$$

2. Soit $h \in E$. En particulier, h est continue sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de l'équation $y'' + \lambda y = h$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2. En particulier, cette équation a au moins une solution. Cette solution est par définition deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $y'' + \lambda y = h$. Il reste à vérifier que y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons que y soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $y'' = -\lambda y + h$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore y est $n+2$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $y \in E$.

3. Ainsi, $\forall h \in E$, $\exists y \in E/ \ \varphi(y) = h$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$$

4. Le noyau de φ est constitué des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + \lambda y = 0$. On sait que ces solutions sont toutes dans E et constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\varphi \text{ est de dimension 2.}}$$

5. • Si $\lambda > 0$, $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
• Si $\lambda = 0$, $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \mapsto ax + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
• Si $\lambda < 0$, $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \mapsto a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. Une solution particulière de l'équation $y'' + \lambda y = \dfrac{1}{2}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\lambda}$ si $\lambda \neq 0$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ si $\lambda = 0$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Si } \lambda > 0,\ \varphi^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{2\lambda} + a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.\\
\text{Si } \lambda = 0,\ \varphi^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + ax + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\\
\text{Si } \lambda < 0,\ \varphi^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{2\lambda} + a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.
\end{array}}$$

7. **7.1** • Si $\lambda > 0$, $\mathrm{Ker}\varphi = \left\{x \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Dans ce cas, tout élément de $\mathrm{Ker}\varphi$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\text{si } \lambda > 0,\ \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\varphi = \left\{x \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

• Si $\lambda = 0$, $\mathrm{Ker}\varphi$ est constitué des fonctions affines. Une fonction affine est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction est constante sur $\mathbb{R}$. Donc, dans ce cas, $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension 1 et est égal à l'ensemble des fonctions constantes.

$$\text{si } \lambda = 0,\ \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{x \mapsto a,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $\lambda < 0$, $\mathrm{Ker}\varphi = \left\{x \mapsto a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On ne peut pas avoir simultanément $a - b = 0$ et $a + b = 0$. Si $a - b \neq 0$, $a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{a-b}{2}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ et si $a + b \neq 0$, $a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{a+b}{2}e^{\sqrt{-\lambda}x}$. Dans les deux cas, la fonction $x \mapsto a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ car admet une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

$$\text{si } \lambda < 0,\ \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{0\}.$$

7.2 D'après ce qui précède

$$\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda < 0.$$

7.3 Soit $\lambda < 0$. Soient $f \in \mathrm{Ker}\varphi$ et $g \in \mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$.
Si $(a, b) = (0, 0)$, $f + g = g$ et donc la fonction $f + g$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $x \mapsto x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, on ne peut avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = x$.
Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors ou bien $a - b \neq 0$ et dans ce cas $f(x) = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{a-b}{2}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ puis $f(x) + g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{a-b}{2}e^{-\sqrt{-\lambda}x} \underset{x\to-\infty}{\not\sim} x$, ou bien $a + b \neq 0$ et dans ce cas $f(x) = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+b}{2}e^{\sqrt{-\lambda}x}$ puis $f(x) + g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+b}{2}e^{\sqrt{-\lambda}x} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x$.
Ainsi, dans aucun cas on ne peut avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ x = f(x) + g(x)$.

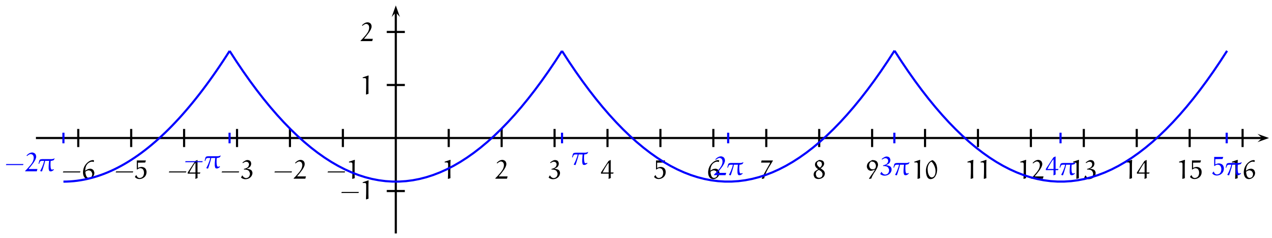
7.4 Si $\lambda \geqslant 0$, la somme $\mathrm{Ker}\varphi + \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas directe et donc $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas supplémentaires.

Si $\lambda < 0$, la somme $\mathrm{Ker}\varphi + \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est directe. Maintenant, la fonction $x \mapsto x$ est un élément de E qui ne s'écrit pas comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\varphi$ et d'un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $\mathrm{Ker}\varphi + \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq E$ et dans ce cas aussi $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas supplémentaires.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Ker}\varphi \text{ et } \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ne sont pas supplémentaires.}}$$

Partie 1

1. 1.1 Représentation graphique



1.2 La fonction f est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. La fonction f est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{1}{12}(3t^2 - \pi^2)\cos(nt)\,dt$.

Donc $a_0(f) = \dfrac{1}{6\pi}\left(\left[t^3\right]_0^{\pi} - \pi^3\right) = 0$ puis pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{6\pi}\int_0^{\pi}(3t^2 - \pi^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{6\pi}\left(\left[(3t^2 - \pi^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{6}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) = \frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0(f) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0.}$$

1.3 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. De plus, cette convergence est normale sur $\mathbb{R}$.

1.4 D'après les questions précédentes, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$. En particulier, pour $x = 0$ on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

1.5 La suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est une série alternée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \left(-\frac{\pi^2}{12}\right)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \left(-\frac{\pi^2}{12}\right)\right| < \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \Leftarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \Leftarrow n \geqslant E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

Donc on peut prendre

$$\boxed{q = E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + 1.}$$

1.6 Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

$$S + S' = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{S}{2},$$

et donc $S = -2S' = \dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

1.7 f n'est pas dérivable en π et donc n'est même pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

2.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $h_n(x) = (-1)^n \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, $|h_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2 + a^2}$, terme général d'une série numérique convergente. Donc la série de fonctions de terme général h_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction h. Donc h est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque de plus, chaque fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2.2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^2 + a^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\cos(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{a^2}{n^2(n^2 + a^2)}\cos(nx) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{a^2}{n^2(n^2 + a^2)}\cos(nx). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{a^2}{n^2(n^2 + a^2)}\cos(nx).}$$

2.3 La série de fonctions de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction $f - h$ sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$v_n'(x) = (-1)^n \frac{a^2}{n(n^2 + a^2)}\sin(nx) \text{ puis } v_n''(x) = (-1)^n \frac{a^2}{n^2 + a^2}\cos(nx).$$

De plus, pour tout entier naturel non nul et tout réel x, $|v_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n(n^2+a^2)}$ et $|v_n''(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2+a^2}$, termes généraux de séries numériques convergentes. On en déduit que les séries de fonctions de termes généraux respectifs v_n' et v_n'' sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction $f - h = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ses deux premières dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

2.4 Puisque f est de classe C^2 sur $]-\pi,\pi[$, h est de classe C^2 sur $]-\pi,\pi[$ en tant que somme de deux fonctions de classe C^2 sur $]-\pi,\pi[$.

3. Pour $x \in]-\pi,\pi[$,

$$h''(x) = f''(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n''(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2\cos(nx)}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} + a^2 h(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est solution de l'équation } y'' - a^2 y = \frac{1}{2} \text{ sur }]-\pi,\pi[.}$$

4. $h'(0) = f'(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(0) = 0 + 0 = 0$ et $h_g'(\pi) = f_g'(\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(\pi) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{h'(0) = 0 \text{ et } h_g'(\pi) = \frac{\pi}{2}.}$$

5. Puisque h est solution sur $]-\pi,\pi[$ de l'équation différentielle $y'' - a^2 y = \dfrac{1}{2}$, il existe des réels α et β tels que $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $h(x) = \alpha \operatorname{ch}(ax) + \beta \operatorname{sh}(ax) - \dfrac{1}{2a^2}$ (puisque la fonction constante $x \mapsto -\dfrac{1}{2a^2}$ est une solution particulière de cette équation).
Puisque h est paire, $\beta = 0$. Ensuite, l'égalité $h_g'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$ fournit $\alpha a \operatorname{sh}(a\pi) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2a\operatorname{sh}(a\pi)}$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ h(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(ax)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.}$$

6. L'égalité précédente reste valable sur $[-\pi,\pi]$ par continuité de la fonction h sur $[-\pi,\pi]$.

$$\boxed{\forall x \in [-\pi,\pi],\ h(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(ax)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.}$$

7. Pour $x\pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = h(\pi) = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.}$$

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, posons $u_n(a) = \dfrac{1}{n^2+a^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant u_n(a) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et donc la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $\mathbb{R}$. Puisque chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \right).$$

Maintenant

$$\frac{\pi\operatorname{ch}(a\pi)}{2a\operatorname{sh}(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}=\frac{a\pi\operatorname{ch}(a\pi)-\operatorname{sh}(a\pi)}{2a^2\operatorname{sh}(a\pi)}\underset{a\to 0}{=}\frac{a\pi\left(1+\dfrac{a^2\pi^2}{2}+o(a^2)\right)-\left(a\pi+\dfrac{a^3\pi^3}{6}+o(a^3)\right)}{2a^3\pi+o(a^3)}$$
$$\underset{a\to 0}{=}\frac{\dfrac{a^3\pi^3}{3}+o(a^3)}{2a^3\pi+o(a^3)}=\frac{\pi^2}{6}+o(1)$$

et on retrouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie 2

1. Soit $a>0$. La fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}\underset{x\to 0}{\sim}a$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx$ existe.

2. **2.1** Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La fonction $x\mapsto e^{-kx}\sin(ax)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées (car $k>0$). Donc la fonction $x\mapsto e^{-kx}\sin(ax)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on déduit que l'intégrale J_k existe.

2.2 Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$J_k=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-k+ia)x}\,dx\right)=\operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-k+ia)x}}{-k+ia}\right]_0^{+\infty}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{k-ia}\left(1-\lim_{x\to+\infty}e^{(-k+ia)x}\right)\right)$$
$$=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{k-ia}\right)\ (\text{car } |e^{(-k+ia)x}|=e^{-kx}\underset{x\to+\infty}{\to}0)$$
$$=\operatorname{Im}\left(\frac{k+ia}{k^2+a^2}\right)=\frac{a}{k^2+a^2}.$$

$$\boxed{\forall a>0,\ J_k=\frac{a}{k^2+a^2}.}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$R_n=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx-\sum_{k=0}^{n}J_{k+1}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-\sum_{k=0}^{n}e^{-(k+1)x}\right)\sin(ax)\,dx$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-e^{-x}\frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{1-e^{-x}}\right)\sin(ax)\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{e^x-1}\right)\sin(ax)\,dx$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)x}}{e^x-1}\sin(ax)\,dx$$

4. La fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit $M>0$ un majorant de la valeur absolue de cette fonction sur $]0,+\infty[$.

$$|R_n|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\left|\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\right|dx\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\,dx=\frac{M}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}R_n=0.}$$

5. Mais alors pour $a > 0$, d'après la question 7 de la partie 1,

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.}$$

