Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Exercice 1

1) Calculs préliminaires **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \mathrm{Im}(e^{3ix}) = \mathrm{Im}((\cos x + i\sin x)^3) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x\\ &= -4\sin^3 x + 3\sin x.\end{aligned}$$

b) i) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, quand x tend vers 0,

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et on prolonger f par continuité en 0. Ce prolongement, noté φ, est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}.}$$

iii) Puisque la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2) a) La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Quand x tend vers 0, $g(x) \sim \dfrac{x^3}{x^2} = x$. On en déduit que g se prolonge par continuité en 0 et donc g est intégrable au voisinage de 0.

Quand x tend vers $+\infty$, $g(x) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc g est intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, g est intégrable sur $]0, +\infty$ et donc I existe.

b) i) Soit $a > 0$. Les deux fonctions considérées sont continues sur $[a, +\infty[$ et dominées par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc les deux fonctions considérées sont intégrables sur $[a, +\infty[$ et on en déduit que les deux intégrales considérées convergent. En posant $u = 3x$, on obtient

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin(3x)}{x^2}\,dx = \int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\frac{u^2}{9}}\,\frac{du}{3} = 3\int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}\,du.$$

ii) Soit $a > 0$. D'après la question 1)a)

$$\begin{aligned}I(a) &= \frac{1}{4}\int_a^{+\infty}\frac{3\sin x - \sin(3x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(3\int_a^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx - 3\int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx\right) \text{ (d'après la question précédente)}\\ &= \frac{3}{4}\int_a^{3a}\left(\frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{3}{4}\int_a^{3a}\varphi(x)\,dx + \frac{3\ln 3}{4}.\end{aligned}$$

iii) Puisque φ est continue sur $[0,+\infty[$, φ admet une primitive F sur $[0,+\infty[$. Mais alors $\displaystyle\int_a^{3a}\varphi(x)\,dx = F(3a)-F(a) \underset{a\to 0}{\rightarrow} F(0)-F(0)=0$. Par suite,

$$I=\lim_{a\to 0} I(a)=\lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{4}\int_a^{3a}\varphi(x)\,dx+\frac{3\ln 3}{4}\right)=\frac{3\ln 3}{4}.$$

$$\boxed{I=\frac{3\ln 3}{4}.}$$

Exercice 2

Préliminaires

1) φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et donc sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et (1) est une matrice de format $(1,3)$ c'est-à-dire une matrice ligne.
$\varphi(e_1)=a\times 1+b\times 0+c\times 0=a$ et de même $\varphi(e_2)=b$ et $\varphi(e_3)=c$. Donc la matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et (1) est $L=\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$.

2) a) f est une application linéaire de E dans E et φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Donc $\varphi\circ f$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire sur E.

• Supposons $\text{Ker}\varphi$ stable par f. Soit $x\in\text{Ker}(\varphi)$. Alors $f(x)\in\text{Ker}\varphi$ et donc $\varphi(f(x))=0$ ou encore $x\in\text{Ker}(\varphi\circ f)$. Ceci montre que $\text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}(\varphi\circ f)$.

• Supposons $\text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}(\varphi\circ f)$. Soit $x\in\text{Ker}\varphi$. Alors $x\in\text{Ker}(\varphi\circ f)$ et donc $\varphi(f(x))=0$ ou encore $f(x)\in\text{Ker}\varphi$. Ceci montre que $\text{Ker}\varphi$ est stable par f.

$$\boxed{\text{Ker}\varphi \text{ stable par } f \Leftrightarrow \text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}(\varphi\circ f).}$$

b) • Si il existe un scalaire λ tel que $\varphi\circ f=\lambda\varphi$, alors pour tout x de $\text{Ker}\varphi$, $\varphi(f(x))=\lambda\varphi(x)=0$ et donc $x\in\text{Ker}(\varphi\circ f)$. Ainsi, $\text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}(\varphi\circ f)$. On en déduit d'après la question précédente que $\text{Ker}\varphi$ est stable par f.

• Réciproquement, supposons que $\text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}(\varphi\circ f)$. $\text{Im}\varphi$ est un sous-espace de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1 et donc $\text{Im}\varphi$ est de dimension 0 ou 1. De plus, φ n'est pas nulle et donc $\text{Im}\varphi$ est de dimension 1. Par le théorème du rang, $\text{Ker}\varphi$ est de dimension $3-1=2$ et donc $\text{Ker}\varphi$ est un plan.
Soit x_0 un vecteur non dans $\text{Ker}\varphi$. Alors, $E=\text{Ker}\varphi\oplus\text{Vect}(x_0)$. Par définition de x_0, $\varphi(x_0)\neq 0$ et on peut poser $\lambda=\dfrac{\varphi(f(x_0)}{x_0}$. Montrons alors que $\varphi\circ f=\lambda\varphi$.
Déjà les restrictions des applications linéaires $\varphi\circ f$ et $\lambda\varphi$ coïncident en x_0 et donc coïncident sur $\text{Vect}(x_0)$. D'autre part, puisque $\text{Ker}\varphi\subset\text{Ker}\varphi\circ f$, $\lambda\varphi$ et $\varphi\circ f$ s'annulent sur $\text{Ker}\varphi$ et en particulier coïncident sur $\text{Ker}\varphi$.
Ainsi, $\lambda\varphi$ et $\varphi\circ f$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires et on sait que $\varphi\circ f=\lambda\varphi$.

$$\boxed{\text{Ker}\varphi \text{ stable par } f \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \varphi\circ f=\lambda\varphi.}$$

c) Puisque l'égalité $\varphi\circ f=\lambda\varphi$ est équivalente à l'égalité $LA=\lambda L$, on a encore

$$\boxed{\text{Ker}\varphi \text{ stable par } f \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ LA=\lambda L.}$$

3) Les plans de E sont les noyaux des formes linéaires non nulles sur E. Donc, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\text{Il existe un plan de } E \text{ stable par } f &\Leftrightarrow \exists L\in\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ LA=\lambda L\\ &\Leftrightarrow \exists L\in\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ {}^tA{}^tL=\lambda{}^tL\\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ {}^tAC=\lambda C.\end{aligned}$$

Exemple numérique

4) Recherche des sous-espaces vectoriels de E stables par f

a) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -1-X & 4 & -1 \\ -5 & 8-X & -1 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix} = -(1+X)(X^2-11X+22)+5(-4X+10)+(-X+4) = -X^3+10X^2-34X+32$$
$$= (X-2)(-X^2+8X-16) = -(X-2)(X-4)^2.$$

Ainsi, $\chi_A = \chi_{{}^tA} = -(X-2)(X-4)^2$ et ${}^tA$ admet 2 pour valeur propre simple et 4 pour valeur propre double.

• Déterminons $\mathrm{Ker}(A-2I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -5 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+4y-z=0 \\ -5x+6y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ -3x+4y-(-x+2y)=0 \\ -5x+6y-(-x+2y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ -2x+2y=0 \\ -4x+4y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z.$$

Donc $\mathrm{Ker}(A-2I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Déterminons $\mathrm{Ker}({}^tA-2I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}({}^tA-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x-5y+z=0 \\ 4x+6y-2z=0 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x+y \\ -3x-5y+(x+y)=0 \\ 4x+6y-2(x+y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x+y \\ -2x-4y=0 \\ 2x+4y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y \\ z=-y \end{array}\right.$$

Donc $\mathrm{Ker}({}^tA-2I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Déterminons $\mathrm{Ker}(A-4I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x+4y-z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x-2y \\ -5x+4y-(x-2y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ -6x+6y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ z=-x \end{array}\right. .$$

Donc $\mathrm{Ker}(A-4I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Déterminons $\mathrm{Ker}({}^tA-4I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}({}^tA-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x-5y+z=0 \\ 4x+4y-2z=0 \\ -x-y-z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x-y \\ -5x-5y+(-x-y)=0 \\ 4x+4y-2(-x-y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x-y \\ -6x-6y=0 \\ 6x+6y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x \\ z=0 \end{array}\right.$$

Donc $\mathrm{Ker}({}^tA-4I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Une droite vectorielle stable par f est une droite engendrée par un vecteur propre. Il y a donc deux droites stables par f : $D_1 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.

c) Soit P un plan d'équation $ax+by+cz = 0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. D'après la question 2), P est stable par f si et seulement si le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Il y a donc deux plans stables par f : le plan P_1 d'équation $2x-y+z = 0$ et le plan P_2 d'équation $x-y = 0$. Une base de P_1 est (e_1+2e_2, e_2+e_3) et une base de P_2 est (e_1+e_2, e_3).

5) Etude de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)/\ g \circ f = f \circ g\}$

a) On pose déjà $e'_1 = e_1+e_2-e_3$ et $e'_3 = e_1+e_2+e_3$. On cherche ensuite $e'_2 = xe_1+ye_2+ze_3$ tel que $(f-4\mathrm{Id})(e'_2) = e'_1$.

$$(f-4\mathrm{Id})(e'_2) = e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x+4y-z = 1 \\ -5x+4y-z = 1 \\ x-2y-z = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = x-2y+1 \\ -5x+4y-(x-2y+1) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x+\dfrac{1}{3} \\ z = x-2\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x+\dfrac{1}{3} \\ z = -x+\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

On peut donc prendre $e'_2 = \dfrac{1}{3}(e_2+e_3)$. Il reste à vérifier que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E. Soit donc P la matrice de la famille (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{3} & 1 \\ -1 & \dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ puis en développant suivant la première ligne $\det P = \dfrac{2}{3} \neq 0$. Donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note que e'_1 et e'_2 vérifient l'équation $2x-y+z = 0$ et donc $\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$ est le plan P_1.

b) On sait que si u et v sont deux endomorphismes qui commutent , $\mathrm{Ker}u$ est stable par v. Voici la démonstration de ce résultat.
Soit $x \in \mathrm{Ker}u$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ et donc $v(x) \in \mathrm{Ker}u$.

Ici, f et g commutent et donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f-\lambda\mathrm{Id}_E$ et g commutent. Par suite, pour tout λ réel, $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id}_E)$ est stable par g et en particulier, g laisse stable $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}_E)$.

c) • Supposons que f et g commutent. D'après les questions précédentes, les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e'_1)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e'_3)$ sont stables par g et donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme $M' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$.

Ensuite,

$$A'M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4b+c & 0 \\ 0 & 4c & 0 \\ 0 & 2d & 2e \end{pmatrix}$$

et

$$M'A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & a+4b & 0 \\ 0 & 4c & 0 \\ 0 & 4d & 2e \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$f \circ g = g \circ f \Rightarrow A'M' = M'A' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4b+c = a+4b \\ 2d = 4d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 0 \\ a = c \end{array}\right..$$

Donc, si f et g commutent M' est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, alors $A'M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha & 4\gamma+\alpha & 0 \\ 0 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix}$ et $M'A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha & 4\gamma+\alpha & 0 \\ 0 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix}$. Donc $A'M' = M'A'$ ou encore $f \circ g = g \circ f$.

d) Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a\mathrm{Id}_E + bf + cf^2) \circ f = af + bf^2 + cf^3 = f \circ (a\mathrm{Id}_E + bf + cf^2)$. Donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2) \subset \mathcal{C}(f)$.

Réciproquement, si g est un endomorphisme qui commute avec f, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme $M' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. On note alors $A'^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2) \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ aI + bA' + cA'^2 = M' \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} a + 4b + 16c = \alpha \\ a + 2b + 4c = \beta \\ b + 8c = \gamma \end{array} \right. .$$

Le déterminant de ce système vaut $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 12 - (-16) = 28 \neq 0$ et donc ce système est un système de Cramer.
Ce système admet donc une solution et une seule et donc $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2)$. On a montré que

$$\boxed{\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2).}$$

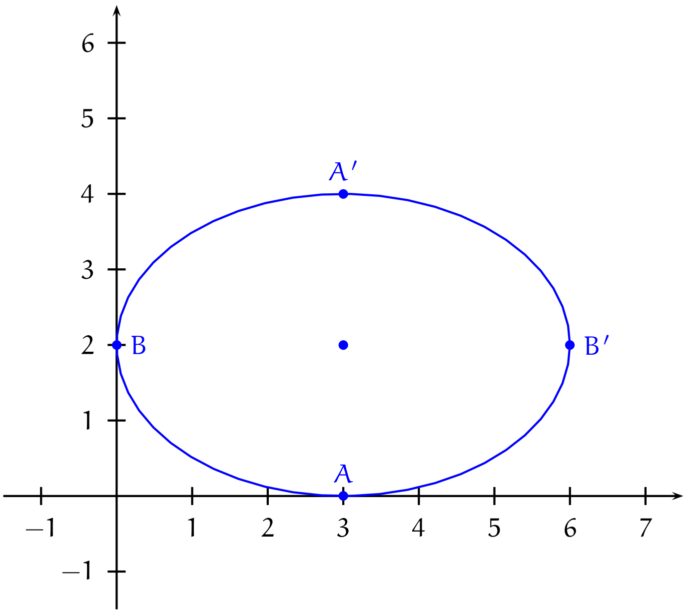
Exercice 3

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathcal{C}_6 &\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0 \Leftrightarrow 4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, C_6 est une ellipse de centre $\Omega(3,2)$ et d'axes les droites d'équations respectives $x = 3$ et $y = 2$. De plus, puisque $a = 3 > 2 = b$, l'axe focal de l'ellipse est la droite d'équation $y = 2$.
Les sommets de l'ellipse sont les points $A(3,0)$, $B(0,2)$, $A'(3,4)$ et $B'(6,2)$ et les tangentes en ces points sont les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$, $y = 4$ et $x = 6$.

Représentation graphique



2) **a)** Soit $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R},\ M \in \mathcal{C}_m &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ 4x^2 + 9y^2 + 2(m-6)xy - 24x - 36y + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(2xy) + 4x^2 + 9y^2 - 6xy - 24x - 36y + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2xy = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 6xy - 24x - 36y + 36 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 9y^2 - 36y + 36 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ 4x^2 - 24x + 36 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 9(y-2)^2 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ 4(x-3)^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array} \right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow M = A \text{ ou } M = B. \end{aligned}$$

Ainsi, les points A et B appartiennent à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathbb{R}$, et les points A et B sont les seuls points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathbb{R}$. En particulier, aucune des courbes $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathbb{R}$, n'est vide ou réduite à un point.

b) Etudions le cas $m = 12$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{C}_{12} &\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 24x - 36y + 36 = 0 \Leftrightarrow (2x+3y)^2 - 12(2x+3y) + 36 = 0 \Leftrightarrow (2x+3y-6)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0.\end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}_m$ est la droite (AB).

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{12\}$. La règle de dédoublement des termes fournit une équation de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A quand cette tangente existe :

$$4x_A x + 9y_A y + (m-6)(y_A x + x_A y) - 12(x + x_A) - 18(y + y_A) + 36 = 0$$

ou encore $12x + 3(m-6)y - 12(x+3) - 18y + 36 = 0$ ou encore $3(m-12)y = 0$ ou enfin $y = 0$.

De même, une équation de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en B quand cette tangente existe est $18y + 2(m-6)x - 12x - 18(y+2) + 36 = 0$ ou encore $2(m-12)x = 0$ ou enfin $x = 0$.

Si $m \neq 12$, la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A est (Ox) si cette tangente existe et la tangente à $\mathcal{C}_m$ en B est (Oy) si cette tangente existe.

3) a) Le discriminant de la courbe $\mathcal{C}_m$ est $\Delta = ac - b^2 = 4 \times 9 - (m-6)^2 = -m(m-12)$.
La courbe $\mathcal{C}_m$ est du type ellipse si et seulement si $m \in]0, 12[$. Dans ce cas, $\mathcal{C}_m$ est soit une ellipse éventuellement réduite à un cercle, soit un point, soit vide. Les deux dernières situations sont à exclure car $\mathcal{C}_m$ contient deux points distincts d'après la question 2)a). D'autre part, $\mathcal{C}_m$ n'est pas une ellipse car, en repère orthonormé, les coefficients de x^2 et y^2 dans une équation de cercle sont toujours égaux. En résumé,

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{C}_m \text{ est du type ellipse si et seulement si } m \in]0,12[\\ \forall m \in]0,12[,\ \mathcal{C}_m \text{ est une ellipse tangente à } (Ox) \text{ et } (Oy) \text{ en } A \text{ et } B.\end{array}}$$

b) $\mathcal{C}_m$ est du type hyperbole si et seulement si $\Delta < 0$ c'est-à-dire $m \in]-\infty, 0[\cup]12, +\infty[$.

c) $\mathcal{C}_m$ est du type parabole si et seulement si $\Delta = 0$ c'est-à-dire $m \in \{0, 12\}$. De plus, dans le cas $m = 12$, $\mathcal{C}_m$ est une parabole dégénérée en une droite.

4) a) $\mathcal{P}$ admet une branche infinie quand t tend vers $+\infty$. De plus, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{2(1-t)^2}{3t^2} = \dfrac{2}{3}$. On en déduit que la courbe $\mathcal{P}$ admet une direction asymptotique de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$ ou encore d'équation $2x - y = 0$.

Ensuite, d'après la question 3)c), si $\mathcal{P}$ est une parabole et une courbe $\mathcal{C}_m$, il ne peut s'agir que de la courbe $\mathcal{C}_0$ d'équation $4x^2 + 9y^2 - 12xy - 24x - 36y + 36 = 0$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = 3t^2\\ y = 2(1-t)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} 2x = 6t^2\\ 3y = 6t^2 - 12t + 6\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{2x - 3y + 6}{12}\\ x = 3t^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{2x - 3y + 6}{12}\\ x = 3\left(\dfrac{2x - 3y + 6}{12}\right)^2\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow 48x = (2x - 3y)^2 + 12(2x - 3y) + 36 \Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0\\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est la parabole } \mathcal{C}_0.}$$

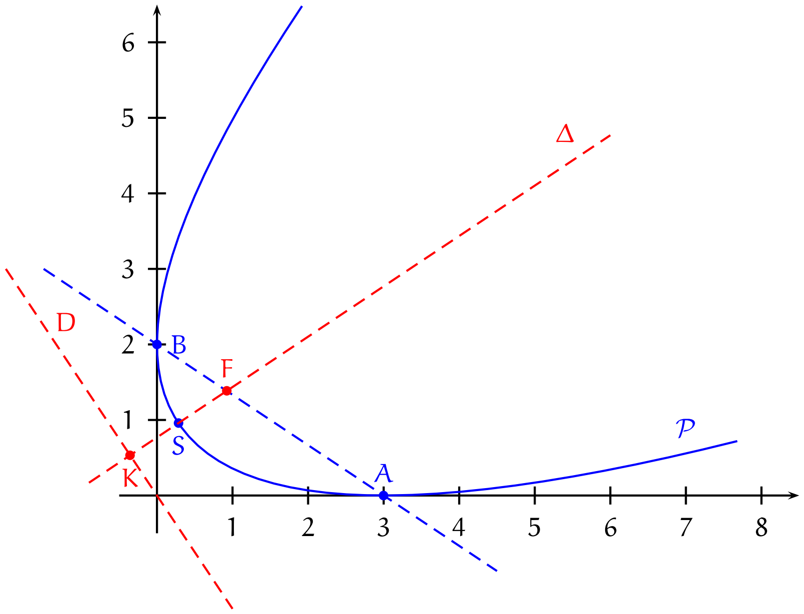
La direction de l'axe de $\mathcal{P}$ est la direction asymptotique de $\mathcal{P}$ et admet pour équation $2x - 3y = 0$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. La tangente en $M(t)$ est dirigée par $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = (6t, 4(t-1))$ ou encore par le vecteur $(3t, 2t-2)$. Cette tangente est perpendiculaire à l'axe de $\mathcal{P}$ si et seulement si $3(3t) + 2(2t-2) = 0$ ou encore $t = \dfrac{4}{13}$.

Maintenant, le seul point de $\mathcal{P}$ en lequel la tangente est perpendiculaire à l'axe est le sommet S. Donc $S = M\left(\dfrac{4}{13}\right) = \left(\dfrac{48}{169}, \dfrac{162}{169}\right)$.

$$\boxed{\text{Le sommet } S \text{ de la parabole } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{48}{169}, \frac{162}{169}\right).}$$

Tracé de $\mathcal{P}$



c) Soit $t_0 \in \mathbb{R}\{0,1\}$ (de sorte que $M(t_0) \neq A$ et $M(t_0) \neq B$ et que la tangente en $M(t_0)$ n'est parallèle ni à (Ox), ni à (Oy)). Une équation de la tangente en $M(t_0)$ est

$$-2(t_0 - 1)(x - 3t_0^2) + 3t_0(y - 2(1 - t_0)^2) = 0,$$

ou encore $2(t_0 - 1)x - 3t_0 y = 6t_0(t_0 - 1)$. Si $y = 0$, on obtient $x = 3t_0$ et si $x = 0$, on obtient $y = -2(t_0 - 1)$. Donc

$$\boxed{Q\,(3t_0, 0) \text{ et } R\,(0, -2(t_0 - 1)).}$$

La perpendiculaire à l'axe $x'Ox$ en Q est la droite d'équation $x = 3t_0$ et la perpendiculaire à l'axe $y'Oy$ en R est la droite d'équation $y = -2(t_0 - 1)$. Donc

$$\boxed{N\,(3t_0, -2(t_0 - 1)).}$$

La courbe paramétrée $\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = -2(t - 1) \end{array}\right.$ est une droite. Comme $N(0) = B$ et $N(1) = A$, il s'agit plus précisément de la droite (AB). Par suite,

$$\boxed{\text{Quand } t_0 \text{ décrit } \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, N \text{ décrit la droite } (AB) \text{ privée des points } A \text{ et } B.}$$

d) Les tangentes à $\mathcal{P}$ en A et B, à savoir (Ox) et (Oy), se coupent en O. Donc le point O appartient à la directrice de $\mathcal{P}$. La directrice D de $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe Δ de $\mathcal{P}$ et a donc pour équation $3x + 2y = 0$.
L'axe Δ a pour équation $2\left(x - \dfrac{48}{169}\right) - 3\left(y - \dfrac{162}{169}\right) = 0$ ou encore $-2x + 3y = \dfrac{30}{13}$. Ensuite,

$$K(x, y) \in D \cap \Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ -2x + 3y = \dfrac{30}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{60}{169} \\ y = \dfrac{90}{169} \end{array}\right. .$$

Le point K a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{60}{169}, \dfrac{90}{169}\right)$. On sait alors que le foyer F est le symétrique du point K par rapport au sommet S et donc

$$F = 2S - K = 2\left(\frac{48}{169}, \frac{162}{169}\right) - \left(-\frac{60}{169}, \frac{90}{169}\right) = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right).$$

Donc

$$\boxed{\text{Le foyer } \mathsf{F} \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right).}$$

Maintenant, pour $t = \dfrac{4}{13}$, on obtient $N(t) = \left(3\dfrac{4}{13}, -2\left(\dfrac{4}{13} - 1\right)\right) = \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{18}{13}\right) = F$ et donc le point F appartient à la droite (AB).

