Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

Partie I : la transformation de Laplace

1. (a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt$ est convergente. De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{x}\left(1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-tx}\right) = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ I_0(x) = \frac{1}{x}.}$$

(b) Soit $x > 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n(x)$ est une intégrale convergente et que $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

- D'après la question précédente, le résultat est vrai quand $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-tx}\,dt$ soit convergente et que $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Soit $T > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto e^{-tx}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, T]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^T t^n e^{-tx}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-tx}\right]_0^T + \frac{x}{n+1}\int_0^T t^{n+1}e^{-tx}\,dt = -\frac{T^{n+1}e^{-xT}}{n+1} + \frac{x}{n+1}\int_0^T t^{n+1}e^{-tx}\,dt.$$

Par hypothèse de récurrence, quand T tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^T t^n e^{-tx}\,dt$ tend vers $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. D'autre part, quand T tend vers $+\infty$, $-\dfrac{T^{n+1}e^{-xT}}{n+1}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\displaystyle\int_0^T t^{n+1}e^{-tx}\,dt$ a une limite quand T tend vers $+\infty$. De plus, en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{x}{n+1}I_{n+1}(x)$ ou encore $I_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.}$$

2. (a) Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0, +\infty[$. $f \in E \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$.

E contient la fonction nulle 0 car 0 est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \underset{t\to+\infty}{=} O(1)$. D'autre part, E est contenu dans $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^m)$.
Soit $p = \text{Max}\{n, m\} \in \mathbb{N}$. Alors, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^p)$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^p)$ puis $\lambda f(t) + \mu g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^p)$. Donc $\lambda f + \mu g \in E$.

On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}).}$$

(b) Une fonction f continue et bornée sur $[0, +\infty[$ est dans E car $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(1) = O(t^0)$.

(c) On a déjà vu que la fonction nulle est dans E.
Soit P une fonction polynomiale non nulle sur $[0, +\infty[$ et n son degré. Alors P est continue sur $[0, +\infty[$ et $P(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$. Donc $P \in E$.

3. **(a)** Soit $f \in E$. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$ et donc $f(t)e^{-tx} \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n e^{-tx})$ puis $f(t)e^{-tx} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par suite, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $F : \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & F(x,t) \end{array}$ une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ de J dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in I \times J$, $|F(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_J^F (x,t)\ dt$ est définie et continue sur I.

(c) Soit $f \in E$. Soient $x_0 > 0$ puis $F : \begin{array}{ccc} [x_0, +\infty[\times[0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-xt} \end{array}$.

- $\forall x \in [x_0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur $[x_0, +\infty[$,
- $\forall (x,t) \in I \times [x_0, +\infty[\times[0, +\infty[$, $|F(x,t)| = |f(t)|e^{-tx} \leqslant f(t)e^{-tx_0} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question (a).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\ dt$ est continue sur $[x_0, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel strictement positif x_0, on a montré que

$$\boxed{\forall f \in E,\ \mathcal{L}(f) \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}).}$$

4. $\mathcal{L}$ est donc une application de l'espace E dans l'espace $C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. Soient alors $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt}\ dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\ dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\ dt = \lambda\mathcal{L}(f)(x) + \mu\mathcal{L}(g)(x).$$

On a montré que

$$\boxed{\mathcal{L} \in \mathscr{L}(E, C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})).}$$

Partie II : quelques propriétés des transformées de Laplace

1. **(a)** Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x)| &= \left|\int_0^A f(t)e^{-tx}\ dt + \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}\ dt\right| \leqslant \int_0^A |f(t)e^{-tx}|\ dt + \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|\ dt \\
&\leqslant \int_0^A |f(t)e^{-tx}|\ dt + C\int_A^{+\infty} t^n e^{-xt}\ dt \\
&\leqslant \int_0^A |f(t)|e^{-tx}\ dt + C\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\ dt = \int_0^A |f(t)|e^{-tx}\ dt + C\frac{n!}{x^{n+1}} \text{ (d'après I.1.(b)).}
\end{aligned}$$

(b) La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, A]$ et admet donc un maximum sur ce segment que l'on note M. Pour $x > 0$, on a alors

$$\int_0^A |f(t)|e^{-xt}\ dt \leqslant M\int_0^A e^{-xt}\ dt = \frac{M}{x}(1 - e^{-xA}) \leqslant \frac{M}{x}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{M}{x} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^A |f(t)|e^{-xt}\ dt = 0$.

(c) Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^A |f(t)|e^{-xt}\,dt = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} C\dfrac{n!}{x^{n+1}} = 0$. La question (a) permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x) = 0$.

$$\boxed{\forall f\in E,\ \lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x) = 0.}$$

2. (a) On reprend les notations utilisées dans la question I.3.(b).
On suppose que $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto F(x,t)$ est continue sur I. On suppose de plus que la fonction F admet sur $I\times J$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x vérifiant

- $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- $\forall t\in J$, la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ_1 de J dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que $\forall (x,t)\in I\times J,\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$.

Alors la fonction $x\mapsto \int_J^F(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur I.

Soit $x_0>0$. F désigne maintenant la fonction $F : \begin{array}{ccc}[x_0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-xt}\end{array}$. F admet sur $[x_0,+\infty[\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par $\forall (x,t)\in[x_0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt}$.
De plus,

- $\forall x\in[x_0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- $\forall t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[x_0,+\infty[$,
- $\forall (x,t)\in[x_0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t|f(t)|e^{-x_0t} = \varphi_1(t)$.

La fonction φ_1 est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. De plus, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$. Mais alors $t|f(t)|e^{-x_0t} = O(t^{n+1}e^{-x_0t})$ puis $\varphi_1(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La fonction φ_1 est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[x_0,+\infty[$ et pour $x\geqslant x_0$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,dt.$$

(b) Ceci étant vrai pour tout $x_0>0$, on a montré que

$$\boxed{\forall f\in E,\ \mathcal{L}(f)\text{ est de classe }C^1\text{ sur }]0,+\infty[\text{ et }\forall x>0,\ (\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,dt.}$$

3. (a) Soit $x>0$. Soit $A>0$. Les deux fonctions f et $t\mapsto e^{-tx}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A f'(t)e^{-tx}\,dt = \left[f(t)e^{-tx}\right]_0^A + x\int_0^A f(t)e^{-tx}\,dt = f(A)e^{-xA} - f(0) + x\int_0^A f(t)e^{-tx}\,dt.$$

Puisque $f\in E$, $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)e^{-xA} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Puisque $f'\in E$, quand A tend vers $+\infty$ on obtient $(\mathcal{L}(f))'(x) = -f(0) + x\mathcal{L}(f)(x)$.

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ (\mathcal{L}(f))'(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).}$$

(b) Puisque $f'\in E$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f'(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n)$. Mais alors $tf'(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t^{n+1})$. On en déduit que la fonction $h : t\mapsto tf'(t)$ est dans E. Ensuite, pour $x>0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(h)(x) &= \int_0^{+\infty} tf'(t)e^{-xt}\,dt = -\left(\mathcal{L}(f')\right)'(x) = \left(f(0) - x\mathcal{L}(f)\right)'(x)\ \text{(d'après 2.(b) et 3.(a))}\\ &= -\mathcal{L}(f)(x) - x\left(\mathcal{L}(f)\right)'(x).\end{aligned}$$

(c) Soit $x > 0$.

$$\mathcal{L}(f'')(x) = x\mathcal{L}(f')(x) - f'(0) = x(x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)) - f'(0) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0).$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f'')(x) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0).}$$

Partie III : une application de la transformée de Laplace

1. Les deux fonctions $t \mapsto -t$ et $t \mapsto 2p$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy, le problème $(\mathcal{P})$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

2. Par linéarité de la transformation de Laplace et d'après les résultats de la partie II, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y'' - tY' + 2pY)(x) &= (x^2\mathcal{L}(Y)(x) - xY'(0) - Y(0)) - (-\mathcal{L}(Y)(x) - x(\mathcal{L}(Y))'(x)) + 2p\mathcal{L}(Y)(x)\\ &= xU'(x) + (x^2 + 2p + 1)U(x) - x,\end{aligned}$$

et donc pour $x > 0$, $xU'(x) + (x^2 + 2p + 1)U(x) - x = \mathcal{L}(0)(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } U = \mathcal{L}(Y) \text{ est solution de } (J) \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

3. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= \int_0^x t^{2n+2} \times te^{t^2/2}\,dt = \left[t^{2n+2}e^{t^2/2}\right]_0^x - (2n+2)\int_0^x t^{2n+1}e^{t^2/2}\,dt\\ &= x^{2n+2}e^{x^2/2} - (2n+2)f_n(x)\ (0^{2n+2} = 0 \text{ car } 2n+2 > 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = x^{2n+2}e^{x^2/2} - (2n+2)f_n(x).}$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}$.

• Pour $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k} = -1 + e^{x^2/2} = \left[e^{t^2/2}\right]_0^x = \int_0^x te^{t^2/2}\,dt = f_0(x).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}$. Alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= x^{2n+2}e^{x^2/2} - 2(n+1)f_n(x) = x^{2n+2}e^{x^2/2} + (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{k+1}}{(n-k)!}x^{2n-2k}\\ &= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + x^{2n+2}e^{x^2/2} + (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{2^k}{(n-(k-1))!}x^{2n-2(k-1)}\\ &= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + x^{2n+2}e^{x^2/2} + (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{2^k}{(n+1-k)!}x^{2(n+1)-2k}\\ &= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{2^k}{(n+1-k)!}x^{2(n+1)-2k}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}.}$$

4. **(a)** On note (J_h) l'équation homogène associée à (J). Sur $]0,+\infty[$, (J_h) s'écrit encore $u'+\left(x+\dfrac{2p+1}{x}\right)u=0$. Puisque la fonction $x\mapsto x+\dfrac{2p+1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, les solutions de (J_h) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace de dimension 1.

Soit u une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}u \text{ solution de } (J) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ u'(x)+\left(x+\frac{2p+1}{x}\right)u(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ u'(x)\exp\left(\frac{x^2}{2}+(2p+1)\ln x\right)+\left(x+\frac{2p+1}{x}\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}+(2p+1)\ln x\right)u(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \left(e^{x^2/2}x^{2p+1}u\right)'(x)=0\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ u(x)=C\frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}(J_h)=\operatorname{Vect}\left(x\mapsto\frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}\right).}$$

(b) Soit u une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}u \text{ solution de } (J) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ u'(x)+\left(x+\frac{2p+1}{x}\right)u(x)=1\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \left(e^{x^2/2}x^{2p+1}u\right)'(x)=e^{x^2/2}x^{2p+1}\\ &\Leftrightarrow \exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ e^{x^2/2}x^{2p+1}u(x)=C'+\int_0^x t^{2p+1}e^{t^2/2}\,dt\\ &\Leftrightarrow \exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ u(x)=C'\frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}+\frac{(-1)^{p+1}2^p p!e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}+p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!x^{2k+1}}\\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ u(x)=C\frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}+p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!x^{2k+1}},\end{aligned}$$

en posant $C=C'+(-1)^{p+1}2^p p!$ de sorte que C décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si C' décrit $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}(J)=\left\{x\mapsto C\frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}}+p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!x^{2k+1}},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

5. **(a)** Pour $x>0$,

$$\begin{aligned}U_0(x)=p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!x^{2k+1}}&=p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}\frac{(2k)!}{x^{2k+1}}\\ &=p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}I_{2k}(x)\ \text{(d'après I.1.(b)}\\ &=\int_0^{+\infty}p!\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}t^{2k}\right)e^{-xt}\,dt=\mathcal{L}(R_0)(x)\end{aligned}$$

où $\forall x>0,\ R_0(x)=p!\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}x^{2k}$.

$$\boxed{\forall x>0,\ R_0(x)=p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}x^{2k}.}$$

(b) Soit $R=p!\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!(2k)!}X^{2k}$. On a déjà $R(0)=p!(-1)^0\dfrac{2^0}{(p-0)!0!}=1$ et $R'(0)=0$ (le coefficient de X est nul).

Ensuite, d'après III.2, puisque $\forall x > 0$, $xR_0'(x) + (x^2 + 2p + 1)R_0(x) = x$, on a encore $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(R_0'' - tR_0' + 2pR_0)(x) = 0$.

Maintenant, $R''-tR'+2pR$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2p$. On peut donc poser $R''-XR'+2pR = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$.

D'après la question I.1., on a

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(R_0'' - XR_0' + 2pR_0)(x) = \sum_{k=0}^{2p} a_k \frac{k!}{x^{k+1}},$$

et, puisque $]0, +\infty[$ est infini, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p} a_k \frac{k!}{X^{k+1}} = 0$. Mais alors, puisque la famille $\left(\dfrac{1}{X^{k+1}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant 2p}$ est libre (unicité de la décomposition en éléments simples), tous les a_k sont nuls puis $R'' - XR' + 2pR = 0$.

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R''(x) - XR'(x) + 2pR(x) = 0$ et $R(0) = 1$ et $R'(0) = 0$. Donc R est la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Partie IV : injectivité de la transformation de Laplace

1. Soit $f \in E$. D'après la question I.3.(a), pour tout réel $x > 0$, la fonction $s \mapsto f(s)e^{-xs}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En particulier, pour $x = 1$, la fonction $s \mapsto f(s)e^{-s}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Mais alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s)e^{-s}\,ds$ est une intégrale convergente en $+\infty$ ou encore la fonction g a une limite en $+\infty$.

2. La fonction $s \mapsto f(s)e^{-s}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$.
La fonction g a une limite L en $+\infty$. Donc il existe $A > 0$ tel que $\forall t \in [A, +\infty[$, $|g(t)| \leqslant 1 + |L|$. En particulier, g est bornée sur $[A, +\infty[$. D'autre part, g est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Finalement, g est bornée sur $[0, +\infty[$.

En résumé, g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$ et d'après la question I.2.(b),

$$\boxed{g \in E.}$$

3. **(a)** La fonction $s \mapsto f(s)e^{-s}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction g est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (donc g' est continue sur $[0, +\infty[$) et $\forall t \geqslant 0$, $g'(t) = f(t)e^{-t}$. En particulier, $g'(t) \underset{t \to +\infty}{=} O(f(t)) \underset{t \to +\infty}{=} O(t^n)$ pour un certain n. Donc $g' \in E$.

Soit $x > 0$. D'après II.3.(a),

$$x\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt = x\mathcal{L}(g)(x) = g(0) + \mathcal{L}(g')(x) = 0 + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}\,dt$$

et donc

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}\,dt.}$$

(b) **(i)** La fonction $u \mapsto -\ln u$ est continue sur $]0, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction φ est continue sur $]0, 1]$. De plus, $\varphi(u^+) = \displaystyle\lim_{t \to +\infty} g(t) = L = \varphi(0)$ et donc φ est continue en 0. Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0, 1].}$$

(ii) Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto -\ln u$ est une bijection de classe C^1 de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. D'autre part, la fonction $u \mapsto g(-\ln u)e^{x \ln u} = \varphi(u)u^x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. On peut donc poser $t = -\ln u$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt = \int_1^0 g(-\ln u)e^{x \ln u} \times -\frac{du}{u} = \int_0^1 \varphi(u)u^{x-1}\,du.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 u^n \varphi(u)\,du = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(n+2)t}\,dt = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n+2) = 0.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 u^n \varphi(u)\,du = 0.}$$

5. **(a)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel u,

$$\cos(p\pi u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{p^{2n}\pi^{2n}u^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(u) = (-1)^n \dfrac{p^{2n}\pi^{2n}u^{2n}}{(2n)!}\varphi(u)$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur le segment $[0, 1]$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0, 1]$, $|f_n(u)| \leqslant \dfrac{p^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!} \displaystyle\operatorname*{Sup}_{u\in[0,1]} |\varphi(u)|$ qui est le terme général d'une série numérique convergente (de somme $\operatorname{ch}(p\pi) \displaystyle\operatorname*{Sup}_{u\in[0,1]} |\varphi(u)|$).

Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a alors

$$\int_0^1 \cos(p\pi u)\varphi(u)\, du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{p^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 u^{2n}\varphi(u)\, du = 0.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \cos(p\pi u)\varphi(u)\, du = 0.}$$

(c) **(i)** Tout d'abord, ψ est définie sur $[-1, 1]$ par $\forall u \in [-1, 1]$, $\psi(u) = \varphi(|u|)$. Mais alors, ψ est correctement définie par 2-périodicité car $\psi(1) = \psi(-1)$.
Ensuite, ψ est continue sur $[-1, 1]$ car φ est continue sur $[0, 1]$ et donc ψ est continue sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité.

(ii) La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. Puisque ψ est paire, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_p(\psi) = 0$ puis pour $p \in \mathbb{N}$,

$$a_p(\psi) = \frac{2}{2}\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{2\pi}{2}u\right)\psi(u)\, du = 2\int_0^1 \cos(p\pi u)\varphi(u)\, du = 0.$$

Puisque ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2-périodique, on peut lui appliquer la formule de Parseval et on obtient

$$\frac{2}{2}\int_{-1}^1 \psi^2(u)\, du = \frac{a_0(\psi)^2}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p(\psi)^2 + b_p(\psi)^2) = 0.$$

On en déduit que ψ est nulle sur $[-1, 1]$ (fonction continue, positive d'intégrale nulle) puis que ψ est nulle sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité.

6. **(a)** Par suite, φ est nulle sur $[0, 1]$ et donc g est nulle sur $[0, +\infty[$. Par suite, $\forall t \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^t f(s)e^{-s}\, ds = 0$. Par dérivation, on obtient $\forall t \geqslant 0$, $f(t)e^{-t} = 0$ puis $\forall t \geqslant 0$, $f(t) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall f \in E,\ \mathcal{L}(f) = 0 \Rightarrow f = 0.}$$

(b) D'après la question I.4., l'application $\mathcal{L}$ est linéaire et d'après la question précédente $\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0\}$. Donc

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est injective.}}$$

