Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

Question de cours

1) • Soit $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

$$C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow C = {}^tC = -C \Rightarrow 2C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \{0\}$.

• Soit $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On a $C = \frac{1}{2}(C + {}^tC) + \frac{1}{2}(C - {}^tC)$ avec ${}^t\left(\frac{1}{2}(C + {}^tC)\right) = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ et ${}^t\left(\frac{1}{2}(C - {}^tC)\right) = -\frac{1}{2}(C - {}^tC)$.
Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On a montré que

$$\boxed{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \forall C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}),\ S_C = \frac{1}{2}(C + {}^tC) \text{ et } A_C = \frac{1}{2}(C - {}^tC).}$$

2) Puisque $\text{rg}(S) \leqslant 2 < 3$, la matrice S n'est pas inversible et donc 0 est valeur propre de S.
S est symétrique réelle donc, puisque b_0 est orthonormée, φ_S est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée b de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de φ_S ou encore il existe une base orthonormée b de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S)$ soit de la forme désirée.

Application. Le polynôme caractéristique de φ_S est

$$\chi_S = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 1) - (-X) = -X(X^2 - 2) = -X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

• Détermination de $\text{Ker}(\varphi_S)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi_S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array}\right. .$$

$\text{Ker}(\varphi_S)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

• Détermination de $\text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id})$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x\sqrt{2} + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}x \\ z = x \end{array}\right. .$$

$\text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$.
• Puisque φ_S est symétrique, $\text{Ker}(\varphi_S + \sqrt{2}\text{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$.
$b = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de φ_S.

Les formules de changement de bases fournissent alors $S = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = {}^tP$ car b est orthonormée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(-\sqrt{2})^n}{2} \\ 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} & -\frac{(-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} \\ \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(1-(-1)^n)\sqrt{2}^n}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S^{2p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{p-1} & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 2^{p-1} & 0 \end{pmatrix} = 2^{p-1}S \text{ et } S^{2p} = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 2^p & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} = 2^{p-1}S^2.}$$

Remarque.
$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2S$.

Par suite, on obtient immédiatement $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $S^{2p-1} = 2^{p-1}S$ puis $S^{2p} = S^{2p-1}S = 2^{p-1}S^2$.

Partie I : Exemples de crochets de Lie et premières propriétés

1) Exemples de Crochets de Lie

a) Il est immédiat que l'application [,] est un crochet de Lie.

b) • [,] est une application de $E \times E$ dans E.
• Soit $(A, B) \in E^2$. $[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$. Par suite, [,] est antisymétrique.
• Soient $(A, B, C) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$[\lambda A + \mu B, C] = (\lambda A + \mu B)C - C(\lambda A + \mu B) = \lambda(AC - CA) + \mu(BC - CB) = \lambda[A, C] + \mu[B, C].$$

Donc [,] est linéaire par rapport à sa première variable et donc, puisque [,] est antisymétrique, [,] est bilinéaire.

• Soit $(A, B, C) \in E^3$.

$$\begin{aligned} &[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \\ &\quad = A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &\quad = ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Finalement, [,] est un crochet de Lie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, il reste juste se convaincre que $[\ ,\ ]$ est bien une application de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$. Vérifions que $[A, B] \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$^t[A, B] = {}^t(AB - BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -(AB - BA) = -[A, B].$$

Ainsi, $[\ ,\ ]$ est une application de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc un crochet de LIE sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $[\ ,\ ]$ n'est pas un crochet de LIE pour $n \geqslant 2$ car si $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, ${}^t[A, B] = -(AB - BA) \neq AB - BA = [A, B]$ si A et B ne commutent pas. De plus, pour $n \geqslant 2$, $A = E_{1,1}$ et $B = E_{1,2} + E_{2,1}$ fournissent un exemple explicite de matrices symétriques de format n ne commutant pas.
Si $n = 1$, $[\ ,\ ]$ est l'application nulle sur $\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ et donc un crochet de LIE sur $\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

2) Crochet de LIE usuel sur $\mathbb{R}^3$

a) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) &= (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{u} \\ &\quad + (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{0},\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$[\overrightarrow{u}, [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]] + [\overrightarrow{v}, [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]] + [\overrightarrow{w}, [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]] = \overrightarrow{0}.$$

Il est d'autre part connu que le produit vectoriel est une application de $(\mathbb{R}^3)^2$ dans $\mathbb{R}^3$, bilinéaire et antisymétrique. Donc

$$\boxed{\text{le produit vectoriel est un crochet de LIE sur } \mathbb{R}^3.}$$

b) i) Puisque le produit vectoriel est linéaire par rapport à sa deuxième variable, $\psi_{\overrightarrow{a}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

ii) Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$. $\overrightarrow{u} \in \text{Ker}(\psi_{\overrightarrow{a}}) \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u})$ liée $\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \text{Vect}(\overrightarrow{a})$.

$$\boxed{\text{Ker}\,(\psi_{\overrightarrow{a}}) = \text{Vect}(\overrightarrow{a}).}$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(\psi_{\overrightarrow{a}}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}\,(\psi_{\overrightarrow{a}})) = 3 - 1 = 2$.

$$\boxed{\text{rgr}\,(\psi_{\overrightarrow{a}}) = 2.}$$

iii) $\psi_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{i}) = \left(\alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}\right) \wedge \overrightarrow{i} = \gamma\,\overrightarrow{j} - \beta\,\overrightarrow{k}$.
$\psi_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{j}) = \left(\alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}\right) \wedge \overrightarrow{j} = -\gamma\,\overrightarrow{j} + \alpha\,\overrightarrow{k}$.
$\psi_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{k}) = \left(\alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}\right) \wedge \overrightarrow{k} = \beta\,\overrightarrow{i} - \alpha\,\overrightarrow{j}$.

$$\boxed{A_{\overrightarrow{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}.}$$

${}^t(A_{\overrightarrow{a}}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = -A$ et donc $A_{\overrightarrow{a}} \in \mathcal{A}_(\mathbb{R})$.

iv) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_{A_{\overrightarrow{a}}} &= \begin{vmatrix} -X & -\gamma & \beta \\ \gamma & -X & -\alpha \\ -\beta & \alpha & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + \alpha^2) - \gamma(\gamma X - \alpha\beta) - \beta(\alpha\gamma + \beta X) = -X^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)X \\ &= -X(X^2 + \|\overrightarrow{a}\|^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_{A_{\overrightarrow{a}}} = -X(X^2 + \|\overrightarrow{a}\|^2).}$$

v) Puisque $\|\overrightarrow{a}\|^2 > 0$, $\chi_{A_{\overrightarrow{a}}}$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc $\psi_{\overrightarrow{a}}$ n'est pas diagonalisable.

vi) Soit $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. La question iii) montre que nécessairement $\overrightarrow{a} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}$ et réciproquement si $\overrightarrow{a} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}$ alors $A = A_{\overrightarrow{a}}$.

Partie II : Détermination des crochets de Lie en dimension 1 et 2

1) a) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille liée de E.

• Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$ car l'application $\overrightarrow{x} \mapsto [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}]$ est linéaire.

• Sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ et donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{u}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}]$. Maintenant, par antisymétrie, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}]$ et donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = \overrightarrow{0}$.

Dans tous les cas, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$.

b) La réciproque est fausse dans un espace de dimension au moins 2. L'application nulle de $E \times E$ dans E est un crochet de Lie sur E et toute famille libre de 2 vecteurs a pour image $\overrightarrow{0}$.
Prenons aussi l'exemple moins trivial du I.1)b). On prend $A = I_n$ et pour B n'importe quelle matrice non scalaire. On a $[A, B] = I_nB - BI_n = 0$ et pourtant la famille (A, B) est libre.

2) a) Dans un espace de dimension 1, toute famille de deux vecteurs est liée et donc, d'après II.1)a), $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$.

b) Ainsi, il y a au plus un crochet de Lie sur un espace E de dimension 1 à savoir l'application nulle de $E \times E$ dans E. Réciproquement, l'application nulle de $E \times E$ dans E est un crochet de Lie sur E d'après I.1)a).

3) a) Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur quelconque de E, $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}] = -[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}]$ par antisymétrie et donc $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}] = 0$.

Soit alors $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] &= [x_1\overrightarrow{u_0} + x_2\overrightarrow{v_0}, y_1\overrightarrow{u_0} + y_2\overrightarrow{v_0}] \\
&= x_1y_1[\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_0}] + x_1y_2[\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}] + x_2y_1[\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{u_0}] + x_2y_2[\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_0}] \text{ (par bilinéarité)} \\
&= x_1y_1 \times 0 + x_1y_2[\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}] - x_2y_1[\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}] + x_2y_2 \times 0 \text{ (par antisymétrie)} \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)[\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}] \\
&= \det_B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{k_0} \text{ où } \overrightarrow{k_0} = [\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = \det_B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{k_0} \text{ où } \overrightarrow{k_0} = [\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0}].}$$

b) i) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$.

• Si la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est de rang au plus 1, chacune des trois familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée et donc $\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = 0$. L'égalité de l'énoncé est donc vraie dans ce cas.

• Sinon, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est de rang 2 et l'un des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire des deux autres. Supposons par exemple qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} &= \det_B(\overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + \det_B(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} \\
&= \lambda\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + \mu\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} \\
&= -\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = -\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}
\end{aligned}$$

et l'égalité de l'énoncé est encore une fois vérifiée.

$$\boxed{\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3,\ \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w} + \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.}$$

ii) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$. Par linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables

$$[\overrightarrow{u}, [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]] = \left[\overrightarrow{u}, \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{k}\right] = \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}\right] = \left[\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}\right]$$

iii) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$. D'après i) et ii),

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u}, [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]] + [\overrightarrow{v}, [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]] + [\overrightarrow{w}, [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]] &= \left[\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}\right] + \left[\det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right] + \left[\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}, \overrightarrow{k}\right] \\
&= \left[\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} + \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}, \overrightarrow{k}\right] \\
&= \left[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

D'autre part, $[\ ,\ ]$ est une application de $E \times E$, bilinéaire et antisymétrique par bilinéarité et antisymétrie du déterminant en dimension 2. Finalement $[\ ,\ ]$ est un crochet de Lie sur E.

c) D'après ce qui précède, les crochets de Lie sur E sont les applications de la forme $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \mapsto \det_B\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{k}$ où B est une base quelconque de E et $\overrightarrow{k}$ est un vecteur quelconque de E.

Partie III : Etude des crochets de Lie en dimension 3

1) a) Encore une fois, par antisymétrie, on a : $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right] = \overrightarrow{0}$.

i) Soit $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2$. Par bilinéarité et antisymétrie de $[\ ,\ ]$

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] &= \left[x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k}, y_1\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + y_3\overrightarrow{k}\right] \\
&= x_1y_1\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}\right] + x_1y_2\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right] + x_1y_3\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right] + x_2y_1\left[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right] + x_2y_2\left[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}\right] + x_2y_3\left[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right] \\
&+ x_3y_1\left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right] + x_3y_2\left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\right] + x_3y_3\left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\right] \\
&= x_1y_2\overrightarrow{c_3} - x_1y_3\overrightarrow{c_2} - x_2y_1\overrightarrow{c_3} + x_2y_3\overrightarrow{c_1} + x_3y_1\overrightarrow{c_2} - x_3y_2\overrightarrow{c_1} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\overrightarrow{c_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{c_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{c_3}.
\end{aligned}$$

ii) Notons X, Y et $X \wedge Y$ les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées des vecteurs respectifs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ dans la base b_0.

$$\begin{aligned}
C \times X \wedge Y &= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2)c_{1,1} + (x_3y_1 - x_1y_3)c_{1,2} + (x_1y_2 - x_2y_1)c_{1,3} \\ (x_2y_3 - x_3y_2)c_{2,1} + (x_3y_1 - x_1y_3)c_{2,2} + (x_1y_2 - x_2y_1)c_{2,3} \\ (x_2y_3 - x_3y_2)c_{3,1} + (x_3y_1 - x_1y_3)c_{3,2} + (x_1y_2 - x_2y_1)c_{3,3} \end{pmatrix} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{pmatrix} + (x_3y_1 - x_1y_3)\begin{pmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ c_{3,2} \end{pmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{pmatrix} c_{1,3} \\ c_{2,3} \\ c_{3,3} \end{pmatrix} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)C_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)C_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)C_3
\end{aligned}$$

et donc $\varphi_C\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right) = (x_2y_3 - x_3y_2)\overrightarrow{c_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{c_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{c_3} = \left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right]$.

$$\boxed{\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2,\ \left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = \varphi_C\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right).}$$

iii) La question ii) montre l'existence f : si $[\ ,\ ]$ est un crochet de Lie et si $f = \varphi_C$, alors $\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2$, $\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = f\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)$.
Réciproquement, si f est un endomorphisme de E tel que $\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2$, $\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = f\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)$, alors $\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2$, $f\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right) = \varphi_C\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)$.
En particulier, $f\left(\overrightarrow{i}\right) = f\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}\right) = \varphi_C\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}\right) = \varphi_C\left(\overrightarrow{i}\right)$ et de même $f\left(\overrightarrow{j}\right) = \varphi_C\left(\overrightarrow{j}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = \varphi_C\left(\overrightarrow{k}\right)$.
Ainsi, les endomorphismes f et φ_C coïncident sur une base de E et donc $f = \varphi_C$.

Remarque. La question ne signifie pas que pour tout endomorphisme f, l'application $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \mapsto f\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)$ est un crochet de Lie.

b) i) $A_C = \dfrac{1}{2}(C - {}^tC) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & c_{1,2} - c_{2,1} & c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} & 0 & c_{2,3} - c_{3,2} \\ c_{3,1} - c_{1,3} & c_{3,2} - c_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$. D'après I.2)b)vi), $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix}$ ou encore

$$\boxed{2\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix}.}$$

ii) $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{c_2} + \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{3,1} \\ c_{3,2} \\ c_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{a}.$

iii) $\left[\overrightarrow{i},\overrightarrow{c_1}\right]+\left[\overrightarrow{j},\overrightarrow{c_2}\right]+\left[\overrightarrow{k},\overrightarrow{c_3}\right]=\left[\overrightarrow{i},\left[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right]\right]+\left[\overrightarrow{j},\left[\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}\right]\right]+\left[\overrightarrow{k},\left[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right]\right]=\overrightarrow{0}$.

iv) $\varphi_C\left(2\overrightarrow{a}\right)=\varphi_C\left(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{c_1}\right)+\varphi_C\left(\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{c_2}\right)+\varphi_C\left(\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{c_3}\right)=\left[\overrightarrow{i},\overrightarrow{c_1}\right]+\left[\overrightarrow{j},\overrightarrow{c_2}\right]+\left[\overrightarrow{k},\overrightarrow{c_3}\right]=\overrightarrow{0}$.
Donc, $2\varphi_C\left(\overrightarrow{a}\right)=\varphi_C\left(2\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{0}$ puis $\varphi_C\left(\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{0}$.
Ensuite, $\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{a}\right)=\varphi_C\left(\overrightarrow{a}\right)-\varphi_{A_C}\left(\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{0}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{a}\in\mathrm{Ker}(\varphi_{S_C})$.

c) D'après la formule du double produit vectoriel, $\forall\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\varphi_{A_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)=\overrightarrow{a}\wedge\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)=\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}$ et donc

$$\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right]=\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)+\varphi_{A_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)=\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}$$

$$\boxed{\forall\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right]=\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}.}$$

2) a) $[\ ,\ ]$ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables par linéarité de φ_S et bilinéarité du produit scalaire et du produit vectoriel.

Ensuite, pour $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2$

$$\left[\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}\right]=\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{y}\wedge\overrightarrow{x}\right)+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x}=-\left(\varphi_{S_C}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}\right)+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}\right)=-\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right].$$

$$\boxed{[\ ,\ ]\text{ est bilinéaire et antisymétrique.}}$$

b) i) Dans la question de cours 2), le premier vecteur de b doit appartenir au noyau de φ_S. Comme $\overrightarrow{a}\in\mathrm{Ker}(\varphi_S)$, $\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{a}\in\mathrm{Ker}(\varphi_S)$ où cette fois-ci le vecteur $\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{a}$ est unitaire et donc non nul. Donc peut choisir comme premier vecteur de b le vecteur $\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{a}$.

ii) On note tout d'abord que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}=\rho\left(\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}\right)=\rho u_1$ car b est orthonormée. De même, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v}=\rho v_1$. Puis

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_b\left(\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]\right)&=\mathfrak{M}_b\left(\varphi_S\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)\right)+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v}\right)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{u}\right)-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}\right)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{v}\right)\\&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}+\rho v_1\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}-\rho u_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\\beta(u_3v_1-u_1v_3)+\rho(u_2v_1-u_1v_2)\\\gamma(u_1v_2-u_2v_1)+\rho(u_3v_1-u_1v_3)\end{pmatrix}=(u_3v_1-u_1v_3)\begin{pmatrix}0\\\beta\\\rho\end{pmatrix}+(u_1v_2-u_2v_1)\begin{pmatrix}0\\-\rho\\\gamma\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=(u_3v_1-u_1v_3)\overrightarrow{d}+(u_1v_2-u_2v_1)\overrightarrow{e}\text{ où }\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{d}\right)=\begin{pmatrix}0\\\beta\\\rho\end{pmatrix}\text{ et }\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{e}\right)=\begin{pmatrix}0\\-\rho\\\gamma\end{pmatrix}.}$$

iii) D'après ce qui précède

$$\mathfrak{M}_b\left(\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{d}\right]\right)=(x_3d_1-x_1d_3)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{d}\right)+(x_1d_2-x_2d_1)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{e}\right)=-\rho x_1\begin{pmatrix}0\\\beta\\\rho\end{pmatrix}+\beta x_1\begin{pmatrix}0\\-\rho\\\gamma\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}0\\-2\beta\rho\\-\rho^2+\beta\gamma\end{pmatrix}.$$

Donc, avec les notations de la question suivante, $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$, $\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{d}\right]=-x_1\overrightarrow{e'}$. De même,

$$\mathfrak{M}_b\left(\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{e}\right]\right)=(x_3e_1-x_1e_3)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{d}\right)+(x_1e_2-x_2e_1)\mathfrak{M}_b\left(\overrightarrow{e}\right)=-\gamma x_1\begin{pmatrix}0\\\beta\\\rho\end{pmatrix}-\rho x_1\begin{pmatrix}0\\-\rho\\\gamma\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}0\\\rho^2-\beta\gamma\\-2\gamma\rho\end{pmatrix},$$

et donc, $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$, $\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{e}\right]=x_1\overrightarrow{d'}$.

$$\boxed{\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3,\ \left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{d}\right]=-_1\overrightarrow{e'}\text{ et }\left[\overrightarrow{x},\overrightarrow{e}\right]=x_1\overrightarrow{d'}.}$$

iv) Soit $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in (\mathbb{R}^3)^3$. D'après ii) et iii)

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{x}, \left[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right]\right] &= (y_3z_1 - y_1z_3)\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{d}\right] + (y_1z_2 - y_2z_1)\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}\right]\\ &= -x_1(y_3z_1 - y_1z_3)\overrightarrow{e'} + x_1(y_1z_2 - y_2z_1)\overrightarrow{d'} = x_1\left((y_1z_2 - y_2z_1)\overrightarrow{d'} + (y_1z_3 - y_3z_1)\overrightarrow{e'}\right).\end{aligned}$$

v) Mais alors, en échangeant les rôles de $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{x}, \left[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right]\right] + \left[\overrightarrow{y}, \left[\overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}\right]\right] + \left[\overrightarrow{z}, \left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right]\right] &= x_1\left((y_1z_2 - y_2z_1)\overrightarrow{d'} + (y_1z_3 - y_3z_1)\overrightarrow{e'}\right)\\ &+ y_1\left((z_1x_2 - z_2x_1)\overrightarrow{d'} + (z_1x_3 - z_3x_1)\overrightarrow{e'}\right)\\ &+ z_1\left((x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{d'} + (x_1y_3 - x_3y_1)\overrightarrow{e'}\right)\\ &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

En tenant compte de la question a), on a montré que

$$\boxed{[\ ,\ ] \text{ est un crochet de Lie.}}$$

vi) Application. Le noyau de φ_S contient le vecteur non nul $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.
Soient $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + y_3\overrightarrow{k}$.

$$\begin{aligned}\varphi_S\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right) &= (x_2y_3 - x_3y_2)\varphi_S\left(\overrightarrow{i}\right) + (x_3y_1 - x_1y_3)\varphi_S\left(\overrightarrow{j}\right) + (x_1y_2 - x_2y_1)\varphi_S\left(\overrightarrow{k}\right)\\ &= (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{i} + ((x_2y_3 - x_3y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1))\overrightarrow{j} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x} - \left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y} &= (y_1 - y_3)\left(x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k}\right) - (x_1 - x_3)\left(y_1\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + y_3\overrightarrow{k}\right)\\ &= (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{i} - ((x_2y_3 - x_3y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1))\overrightarrow{j} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = 2(x_3y_1 - x_1y_3)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right) &= 2\left(\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right).\overrightarrow{j}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right)\\ &= 2\det_{b_0}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{j}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = 2\det_{b_0}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{j}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right).}$$

c) Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $\forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$, $\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = \varphi_S\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)$. La question I.2)a) montre alors immédiatement que [,] est un crochet de Lie.

