Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

Questions de cours.

Question 1.

1) Le résultat est faux. Par exemple, $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais la série numérique de terme général $\frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$, diverge.

2) Le résultat est vrai. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Posons aussi $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Pour $n \geq 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Quand n tend vers $+\infty$, u_n tend vers $S - S$ c'est-à-dire 0.

3) Le résultat est faux. Il devient vrai si on suppose de plus que u_n et v_n sont des suites réelles positives ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Contre-exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$. On a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. De plus, la série de terme général u_n converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Vérifions alors que la série de terme général v_n diverge. Quand n tend vers $+\infty$ on a

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument et donc converge. On en déduit que la série de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge. Mais d'autre part, la série de terme général $t_n = \frac{1}{n+1}$ diverge. On en déduit que la série de terme général $v_n = w_n + t_n$ diverge (dans le cas contraire, la série de terme général $t_n = v_n - w_n$ converge ce qui n'est pas).

4) Le résultat est faux. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \geq 0$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées mais la série de terme général $|u_n| = \frac{1}{n+1}$ diverge.

Question 2. Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \frac{\ln n}{n}$ puis $v_n = (-1)^n u_n$.

- $\forall n \geq 2$, $u_n \geq 0$ et donc $(-1)^n v_n = |v_n| = u_n$.
- u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Vérifions que la suite u est décroissante à partir du rang 3. Pour $x \geq 2$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour $x \geq 2$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Pour $x \geq e$, on a $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier, pour $n \geq 3 > e$,

$$u_n = f(n) \geq f(n+1) = u_{n+1}.$$

D'après ce qui précède, la série de terme général $v_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Préliminaires

1.

1.1. Soit $n > N$.

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} |t_k| \leq (n-N)\varepsilon \leq n\varepsilon.$$

1.2. Soit $n > N$. D'après ce qui précède, on a

$$|T_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} t_k\right| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right| + \frac{n\varepsilon}{n+1}.$$

Maintenant, $\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|$ est constant quand n varie. On en déduit que $\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que $\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right| + \frac{n\varepsilon}{n+1}$ tend vers ε quand n tend vers $+\infty$.
Par suite, on peut trouver un rang $n_0 \geq N$ tel que pour $n \geq n_0$, on a

$$|T_n| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right| + \frac{n\varepsilon}{n+1} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > n_0 \Rightarrow |T_n| < 2\varepsilon)$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = 0.}$$

2. Si la suite (t_n) converge vers T, la suite $(t_n - T)$ converge vers 0 et d'après la question précédente, il en est de même de la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(t_k - T)\right)$. Mais pour $n \geq 0$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(t_k - T) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k\right) - T = T_n - T$. Ainsi $T_n - T$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore T_n tend vers T.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} t_n = T, \text{ la suite } (T_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} T_n = T.}$$

3.

3.1. Soient $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=0}^{n} t_k &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left((k+\frac{1}{2})\theta\right) - \sin\left((k-\frac{1}{2})\theta\right)\right) \\
&= \sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right) - \sin\left((-\frac{1}{2})\theta\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= 2\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, $\theta \in]0, 2\pi[$ et donc $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$. On en déduit que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ puis que $\sum_{k=0}^{n} t_k = \dfrac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et finalement que $T_n = \dfrac{1}{n+1}\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$$

3.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $|T_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ $\left(\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0\right)$. Comme $\dfrac{1}{(n+1)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} T_n = 0.}$$

3.3. Quand $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$. Mais alors la suite extraite (u_{12n}) converge et a pour limite 1 et la suite extraite (u_{12n+6}) converge et a pour limite -1. On a ainsi trouvé deux sous-suites de la suite (t_n), convergentes de limites distinctes. On sait alors que

$$\boxed{\text{la suite } (t_n) \text{ diverge.}}$$

3.4. La réciproque du résultat de la question 2. est donc fausse.

Partie 1.

1. La suite (na_n) est convergente et en particulier bornée. On en déduit qu'il existe un réel K tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|na_n| \leq K$ et donc tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \dfrac{K}{n}$.

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{K}{n}.}$$

2. Soit $x \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_n x^n| \leq \frac{K}{n} x^n \leq K x^n.$$

Maintenant, comme $0 \leq x < 1$, la série géométrique de terme général Kx^n converge. Il en est donc de même de la série numérique de terme général $|a_n x^n|$, $n \geq 0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $a_n x^n$ est absolument convergente.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \text{ la série numérique de terme général } a_n x^n \text{ est absolument convergente.}}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned} u_n = L - \sum_{k=0}^{n} a_k &= L - f(x) + f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \\ &= L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k. \end{aligned}$$

4.

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(ka_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit que $\{|ka_k|,\ k \geq n\}$ est un partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $\{|ka_k|,\ k \geq n\}$ admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ ce qui montre l'existence de M_n.

4.2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_0$, $|ka_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq n_0$. Par définition de M_n, il existe $k_n \geq n$ tel que $M_n < |k_n a_{k_n}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Puisque $k_n \geq n \geq n_0$, on a encore $|k_n a_{k_n}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $M_n < \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0,\ 0 \leq M_n < \varepsilon$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.}$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$.

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k||x^k - 1| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k = |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |ka_k|\frac{x^k}{k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_n\frac{x^k}{n} = \frac{M_n}{n}\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{1}{n(1-x)}M_n,\end{aligned}$$

et donc

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + \frac{1}{n(1-x)}M_n.$$

Ensuite, pour $k \geq 2$, $1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{k-1}) \leq (1 - x)(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k}) = k(1 - x)$ et donc

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} |ka_k| + \frac{1}{n(1-x)}M_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1[,\ |u_n| \leq |L - f(x)| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} |ka_k| + \frac{1}{n(1-x)}M_n.}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on peut appliquer le résultat précédent à $x = 1 - \dfrac{1}{n}$ et on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq \left|L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |ka_k| + M_n.}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

- Puisque $1-\dfrac{1}{n}$ tend vers 1, $L-f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ tend 0 quand n tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1$, $\left|L - f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
- Puisque la suite (na_n) tend vers 0, il en est de même de la suite $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |ka_k|$ d'après les préliminaires. Il existe donc un entier n_2 tel que pour $n \geq n_2$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |ka_k| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
- M_n tend vers 0 d'après la question 4.2. Il existe donc un entier n_3 tel que pour $n \geq n_2$, $M_n < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2, n_3\}$. Pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| < \varepsilon$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

7. On en déduit que la série de terme général a_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$. Ceci signifie que $f(1)$ existe et $f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$ ou encore

$$\boxed{f \text{ est définie et continue en } 1.}$$

Partie 2.

1. Les fonctions $x \mapsto 4x^2$, $x \mapsto 4x$, $x \mapsto -1$ et $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. On peut donc résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant pas 1.

2. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{4x}{4x^2} = \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{-1}{4x}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{4x^2(1-x)} = \dfrac{1}{4x(1-x)}$ sont définies et continues sur $]0,1[$. Les solutions de (E) sur I forment donc un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

3. $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

4. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon R est supposé strictement positif. Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que f est deux fois dérivable terme à terme sur $]-R,R[$ et pour $x \in]-R,R[$, on a

$$\begin{aligned}4x^2f''(x) + 4xf'(x) - f(x) &= 4x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4na_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n(n-1)+4n-1)a_nx^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(4n^2-1)a_nx^n.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in]-1,1[$, $\dfrac{x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$. Soit alors $r = \text{Min}\{1,R\}$.

$$\begin{aligned}f\div;\text{solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[&\Leftrightarrow \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(4n^2-1)a_nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (4n^2-1)a_n = 1 \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)}\\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{4n^2-1}.\end{aligned}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, f est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

Maintenant, si $|x| < 1$, la série de terme général $\dfrac{x^n}{4n^2-1}$ converge (car pour $n \geq 1$, $\left|\dfrac{x^n}{4n^2-1}\right| \leq |x|^n$) et si $|x| > 1$, la série de terme général $\dfrac{x^n}{4n^2-1}$ diverge (car $\dfrac{x^n}{4n^2-1}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$[).
Ceci valide les calculs précédents sur $]-1,1[$.

$$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1} \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[.}$$

5.
5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

5.2. Soit $u \in]0,1[$. $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{u^p}{p}$ et $\ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{u^p}{p}$. Donc,

$$\frac{1}{2}(\ln(1+u)-\ln(1-u)) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{p-1}}{2}\frac{u^p}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{2n-1}}{2}\frac{u^{2n}}{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{2n}}{2}\frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{2n+1}.$$

Donc $h(u) = \frac{1}{2}(\ln(1+u)-\ln(1-u)) = \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

$$\boxed{\forall u \in]0,1[,\ h(u) = \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}.}$$

5.3. Soit $x \in]0,1[$ puis $u = \sqrt{x}$.

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \frac{h(u)}{u} = \frac{1}{u}\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ H(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}.}$$

5.4. Soit $x \in]0,1[$. D'après la question 5.1.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1} + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}((x-1)H(x)+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}+1\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}+1\right).}$$

5.5. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})) = \frac{(\sqrt{x}+o(\sqrt{x}))-(-\sqrt{x}+o(\sqrt{x}))}{2\sqrt{x}} = 1+o(1),$$

et donc $\frac{x-1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$ tend vers 0 quand x tend vers 1 par valeurs inférieures puis

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi(x) = \frac{1}{2}.}$$

6.

6.1. $na_n = \frac{n}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$. La suite (a_n) vérifie donc i). D'autre part, la question précédente montre que la suite (a_n) vérifie ii) avec $L = \frac{1}{2}$.

6.2. D'après la question 7 de la partie 1, la fonction φ est définie et continue en 1 ce qui fournit $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ ou encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \text{ (somme télescopique),}\end{aligned}$$

et quand n tend vers $+\infty$, on retrouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

Partie 3.

1. La série entière associée à $c_n = (-1)^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et pour $x \in]-1,1[$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction h a effectivement une limite réelle quand x tend vers 1 à savoir $\frac{1}{2}$. Pourtant la série numérique de terme général $c_n = (-1)^n$ diverge. Ainsi, la série numérique de terme général c_n ne converge pas toujours.

2. Montrons que la série numérique de terme général c_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = H$.

Puisque les coefficients c_n sont positifs, la fonction h est croissante sur $]0,1[$ et en particulier est majorée par H sur $]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]0,1[$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \leq h(x) \leq H$. Quand x tend vers 1 on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leq H$. Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k\right)$ est majorée par H et puisque les c_n sont positifs, la série de terme général c_n converge et de plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \leq H$.

D'autre part, pour $x \in]0,1[$, on a $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Quand x tend vers 1, on obtient aussi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \geq H$.

Finalement

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} c_n \text{ converge et } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.}$$

3. Si la suite nc_n tend vers 0 ou encore si $c_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, la partie 1 assure que la série de terme général c_n converge.

