Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Première exercice

1. ***Étude d'un exemple.***

(a) Soient x et y deux réels. $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-xy=\frac{(x-y)^2}{2}\geq 0$ avec égalité si et seulement si $y=x$.
De même $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy=\frac{(x+y)^2}{2}\geq 0$ avec égalité si et seulement si $y=-x$.

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)\text{ et }xy=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Leftrightarrow y=x.$$
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\leq xy\text{ et }-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=xy\Leftrightarrow y=-x.$$

(b) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

$$xy+z^2\geq-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2\geq-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{z^2}{2}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

puis en divisant par le réel strictement positif $x^2+y^2+z^2$, on obtient $r(x,y,z)\geq-\frac{1}{2}$.
$-\frac{1}{2}$ est donc un minorant de la fonction r sur $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. De plus, $r(-1,1,0)=-\frac{1}{2}$ et donc

$$\boxed{f\text{ admet un minimum sur }\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\},\text{ égal à }-\frac{1}{2}.}$$

(c) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. $xy+z^2\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2\leq x^2+y^2+z^2$ et donc $r(x,y,z)\leq 1$. De plus, $r(0,0,1)=1$ et donc

$$\boxed{f\text{ admet un maximum sur }\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\},\text{ égal à }1.}$$

(d) $\chi_A=(1-X)(X^2-\frac{1}{4})$ et donc $\text{Sp}(A)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$. Le minimum et le maximum de r sont donc respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

2. ***Étude du cas général.***

(a) $f(\overrightarrow{w})=a_1\lambda_1\overrightarrow{u_1}+a_2\lambda_2\overrightarrow{u_2}+a_3\lambda_3\overrightarrow{u_3}$ et donc, puisque la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ est orthonormée

$$\frac{\langle f(\overrightarrow{w}),\overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2}=\frac{\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2+\lambda_3a_3^2}{\|\|\overrightarrow{w}\|^2}=\frac{\lambda_3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(\lambda_1-\lambda_3)a_1^2+(\lambda_2-\lambda_3)a_2^2}{\|\|\overrightarrow{w}\|^2}$$
$$=\lambda_3+\frac{a_1^2(\lambda_1-\lambda_3)}{\|\|\overrightarrow{w}\|^2}+\frac{a_2^2(\lambda_2-\lambda_3)}{\|\|\overrightarrow{w}\|^2}$$

(b) Soit $\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\overrightarrow{0}\}$.
Puisque $\lambda_1-\lambda_3<0$ et $\lambda_2-\lambda_3<0$, on a $\frac{\langle f(\overrightarrow{w}),\overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2}\leq\lambda_3$. Ceci montre que λ_3 est un majorant de r_f sur $\mathbb{R}^3\setminus\{\overrightarrow{0}\}$. De plus, $\frac{\langle f(\overrightarrow{u_3}),\overrightarrow{u_3}\rangle}{\|\overrightarrow{u_3}\|^2}=\frac{\langle\lambda_3\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_3}\rangle}{\|\overrightarrow{u_3}\|^2}=\lambda_3$. Ainsi, λ_3 est un majorant atteint et donc le maximum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3\setminus\{\overrightarrow{0}\}$.

$$\boxed{\lambda_3\text{ est le maximum de la fonction }r_f\text{ sur }\mathbb{R}^3\setminus\{\overrightarrow{0}\}.}$$

(c) Les valeurs propres de $-f$ sont $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ et $-\lambda_3$. Ces valeurs propres vérifient $-\lambda_3 < -\lambda_2 < -\lambda_1$. D'après la question précédente, le maximum de r_{-f} sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est $-\lambda_1$. Mais il est clair que $r_{-f} = -r_f$ et donc le maximum de $-r_f$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est $-\lambda_1$ ou encore λ_1 est le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

$$\boxed{\lambda_1 \text{ est le minimum de la fonction } r_f \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}.}$$

(d) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A de la question 1.(d). On note $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^3$, $f(\overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}(x\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{i}) + z\overrightarrow{k}$ puis $\langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w}\rangle = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx + z^2 = xy + z^2$ et finalement, si de plus $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$,

$$r_f(\overrightarrow{w}) = \frac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = r(x, y, z).$$

On retrouve alors le fait que le minimum et le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de f.

3. ***Une application.***

(a) $\chi_f = (-1 - X)\begin{vmatrix} 1 - X & 2 \\ 2 & 4 - X \end{vmatrix} = (-1 - X)(X^2 - 5X) = -(X + 1)X(X - 5)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = (-1, 0, 5).}$$

En particulier, f admet trois valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 5$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- Il est clair que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ où $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 0) = \overrightarrow{i}$.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -2z.$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_2})$ où $\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - 5\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -6x = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = 2y.$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - 5\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_3})$ où $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$.

(b) D'après les questions 2.(b) et 2.(c), le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est -1 et le maximum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est 5.
Pour $\overrightarrow{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, on a

$$\langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w}\rangle = \langle -x\overrightarrow{i} + y(\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + z(2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}), x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})\rangle = -x^2 + y(y + 2z) + z(2y + 4z) = -x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz,$$

et donc

$$r_f(\overrightarrow{w}) = \frac{-x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Par suite,

$$r_f(\overrightarrow{w}) = -1 \Leftrightarrow -x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz = -x^2 - y^2 - z^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 4yz + 5z^2 = 0 \Leftrightarrow 2(y + z)^2 + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0 = y.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ tels que $r_f(\overrightarrow{w}) = -1$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{u_1}$.

De même,

$r_f(\overrightarrow{w})=5 \Leftrightarrow -x^2+y^2+4z^2+4yz=5x^2+5y^2+5z^2 \Leftrightarrow 6x^2+4y^2-4yz+z^2=0 \Leftrightarrow 6x^2+(2y-z)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $z=2y$.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ tels que $r_f(\overrightarrow{w})=5$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{u_3}$.

(c) Soit $\overrightarrow{w}=(x,y,z)\in P$. D'après la question précédente

$$r_f(\overrightarrow{w})=\frac{-x^2+y^2+4z^2+4yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(y+2z)^2-x^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(x+y+2z)(-x+y+2z)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}=g(x,y,z).$$

(d) Déjà, g est minorée par -1 et majorée par 5 sur P.
De plus, puisque $1+0+0=1$, le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ est dans P et on a $g(\overrightarrow{u_1})=r_f(\overrightarrow{u_1})=-1$. Donc, g admet un minimum sur P égal à -1.
De même, puisque $0+\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}=1$, le le vecteur $\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{u_3}$ est dans P et on a $g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{u_3}\right)=r_f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{u_3}\right)=5$. Donc, g admet un maximum sur P égal à 5.

$$\boxed{g \text{ admet sur } P \text{ un minimum et un maximum respectivement égaux à } -1 \text{ et } 5.}$$

Les points de P en lesquels le minimum est atteint sont les $(t,0,0)$ tels que $t+0+2\times 0=1$ ou encore $t=1$. Donc g atteint sont minimum en un point de P et un seul, le point $(1,0,0)$.
Les points de P en lesquels le maximum est atteint sont les $(0,t,2t)$ tels que $0+t+2\times 2t=1$ ou encore $t=\frac{1}{5}1$. Donc g atteint sont maximum en un point de P et un seul, le point $\left(0,\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

Deuxième exercice

1. Puisque F est de classe C^2 sur A, le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que $\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}$.

(a) Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $[0,+\infty[$.
Pour $(x,t)\in[0,1]\times[a,b]$, posons $g(x,t)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right)^2\right]$.

Pour $t\in[a,b]$, on a donc $E_F(t)=\int_0^1 g(x,t)\,dx$.

• Puisque F est de lasse C^2 sur A, g est dérivable par rapport à t sur $[0,1]\times[a,b]$. De plus, pour $(x,t)\in[0,1]\times[a,b]$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}(x,t)$$

• Pour tout réel $t\in[a,b]$, les fonctions $x\mapsto g(x,t)$ et $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ sont continues sur le segment $[0,1]$ et donc intégrables sur ce segment.
• La fonction $\frac{\partial g}{\partial t}$ est continue sur le compact $[0,1]\times[a,b]$ et donc bornée sur ce compact. On note M un majorant de la fonction $\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|$ sur $[0,1]\times[a,b]$ puis pour $x\in[0,1]$, posons $\varphi(x)=M$. φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$ et vérifie $\forall(x,t)\in[0,1]\times[a,b]$, $\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right|\leq\varphi(x)$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de LEIBNIZ), la fonction E_F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $\forall t\in[a,b]$, $E_F'(t)=\int_0^1\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,dx$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $[0,+\infty[$,

$$\boxed{E_F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

(b) Sur A, on a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}$. Par suite,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

et donc, pour $t \in [0, +\infty[$,

$$E_F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial t}\right)(x,t)\ dx = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\partial F}{\partial x}(1,t)\frac{\partial F}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\frac{\partial F}{\partial t}(0,t).$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ E_F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(1,t)\frac{\partial F}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\frac{\partial F}{\partial t}(0,t).}$$

2.

(a) F est de classe C^2 sur A et pour $(x,t) \in A$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,t)\right) - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,t)\right) = 0$$

Donc

$$\boxed{F \text{ satisfait } (1).}$$

(b) Pour $t \geq 0$,

$$E_F'(t) = \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}(1,t)\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}(0,t)\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(0,t).$$

Or, $(f_1 - f_2)(1,t) = \beta(t) - \beta(t) = 0$ et donc

$$\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(1,t) = \frac{d}{dt}\left((f_1 - f_2)(1,t)\right) = 0.$$

De même, $\dfrac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(0,t) = 0$ et finalement

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ E_F'(t) = 0.}$$

On en déduit que E_F est constante sur $[0, +\infty[$.

(c) Pour $x \in [0,1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,0) = h(x) - h(x) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x}(x,0) = \frac{d}{dx}(g - g)(x) = 0.$$

Donc $E_F(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (0 + 0)\ dx = 0$ puis d'après (b), E_F est la fonction nulle. Mais alors, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right)^2$ est nulle sur(fonction continue, positive, d'intégrale nulle). On en déduit que les fonctions $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ sont nulles sur A puis que F est constante sur A (car A est un convexe de $\mathbb{R}^2$). Comme $F(0,0) = g(0) - g(0) = 0$, on a montré que F est nulle sur A ou encore $f_1 = f_2$.

$$\boxed{(S) \text{ possède au plus une solution.}}$$

3. On note M un majorant de la suite $(|a_n|)$.

(a) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $h_n(x) = \pi\dfrac{a_n}{n^3}\sin(n\pi x)$.

Pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|h_n(x)| \leq \dfrac{\pi M}{n^3}$. Or la série numérique de terme général $\dfrac{\pi M}{n^3}$, $n \geq 1$, converge et on en déduit que la série de fonctions h_n converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme chaque fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$, on a montré que

$$\boxed{h \text{ est définie et continue sur } [0,1].}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = \dfrac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$.

• Chaque fonction f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n'(t) = \pi\dfrac{a_n}{n^3}\sin(n\pi x)\cos(n\pi t)$ et $f_n''(t) = -\pi^2\dfrac{a_n}{n^2}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$.

• Comme en (a), les séries de fonctions de termes généraux respectifs f_n' et f_n'' convergent normalement sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme appliqué deux fois, la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)\right) = -\pi^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$.

De même, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)\right) = -\pi^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$.

Les résultats précédents entraînent en particulier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et de plus

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t).}$$

(c) D'après la question précédente, f satisfait (5).
Ensuite,

- pour $x \in [0,1]$, $f(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi x)\sin(0) = 0$.
- pour $x \in [0,1]$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \pi \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3}\sin(n\pi x)\cos(0) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3}\sin(n\pi x) = h(x)$.
- pour $t \in \mathbb{R}$, $f(0,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(0)\sin(n\pi t) = 0$.
- pour $t \in \mathbb{R}$, $f(1,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4}\sin(n\pi)\sin(n\pi t) = 0$.

f satisfait donc aux conditions (5), (6) et (7).

Troisième exercice

1. ***Question préliminaire.***

(a) Soient m un minorant de f' sur $[a,b[$ puis $M = -m$.
g est dérivable sur $[a,b[$ et pour $t \in [a,b[$,

$$g'(t) = f'(t) + M \geq m - m = 0.$$

Avec ce choix de M, g est croissante sur $[a,b[$.

(b) D'autre part, f est majorée sur $[a,b[$ et il en est de même de la fonction $t \mapsto Mt$ (un majorant est Mb).
En résumé, la fonction g est croisante et majorée sur $[a,b[$. g admet donc une limite réelle ℓ quand t tend vers b par valeurs inférieures. Mais alors, puisque $\forall t \in [a,b[$, $f(t) = g(t) - Mt$, $f(t)$ tend vers le réel $\ell - Mb$ quand t tend vers b par valeurs inférieures. On a montré que

$$\boxed{f \text{ a une limite réelle en } b.}$$

2.

(a) u est dérivable sur I et,

$$u' = 2(X'X + Y'Y) = 2[(-X + XY)X + (-2Y - X^2)Y] = 2[-X^2 - 2Y^2] \leq 0.$$

Donc

$$\boxed{u \text{ est décroissante sur I.}}$$

(b) ($t_0 = 0 \in [0, \beta[$ et donc $\beta > 0$).
Sur I, u est décroissante positive et donc u est majorée par $u(0)$. Mais alors, $|X| \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq \sqrt{u(0)}$ et de même, $|Y| \leq \sqrt{u(0)}$. Les fonctions X et Y sont donc bornées sur I.
Les fonctions $X' = -X + XY$ et $Y' = -2Y - X^2$ sont aussi bornées sur I (un majorant de $|X'|$ sur I est $\sqrt{u(0)} + u(0)$ et un majorant de $|Y'|$ sur I est $2\sqrt{u(0)} + u(0)$).

$$\boxed{\text{Les fonctions } X, Y, X' \text{ et } Y' \text{ sont bornées sur I.}}$$

(c) La question préliminaire permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\text{Les fonctions X et Y admettent une limite réelle en } \beta.}$$

(d) Vérifions que la fonction X_2 est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta_1[$.

• X est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et X_1 est de classe C^1 sur $[\beta, \beta_1[$. Donc X_2 est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et $[\beta, \beta_1[$.
• $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} X_2(t) = \lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} X(t) = x_1 = X_1(\beta) = X_2(\beta)$ et donc X_2 est continue à gauche en β. On en déduit que X_2 est continue sur $]\alpha, \beta_1[$.
• $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} X_2'(t) = \lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} (-X(t) + X(t)Y(t)) = -x_1 + x_1 y_1 = X_1'(\beta) = (X_2)_d'(\beta)$. Ainsi X_2 est continue sur $]\alpha, \beta]$, de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} X_2'(t)$ existe et est finie. D'après un théorème classique d'analyse, X_2 est de classe C_1 sur $]\alpha, \beta]$ et en particulier, X_2 est dérivable à gauche en β avec $(X_2)_g'(\beta) = \lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ x < \beta}} X_2'(t) = (X_2)_d'(\beta)$. On en déduit encore que X_2 est dérivable en β et que X_2' est continue en β.

Finalement, X_2 est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta_1[$. De même, Y_2 est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta_1[$.

Ainsi, (I_1, X_2, Y_2) est une solution de (S_1). Mais les fonctions X_2 et Y_2 coïncident avec les fonctions X et Y sur I. En particulier $X_2(t_0) = X(t_0) = x_0$ et $Y_2(t_0) = Y(t_0) = y_0$. Donc (I_1, X_2, Y_2) est une solution de (S) telle que $I \underset{\neq}{\subset} I_1$. Ceci contredit le caractère maximal de (I, X, Y) et il était donc absurde de supposer β réel.

$$\boxed{\beta = +\infty.}$$

3.

(a) v est dérivable sur I et pour $t \in I$,

$$v'(t) = e^{2t}(2u(t) + u'(t)) = e^{2t}(2X^2(t) + 2Y^2(t) - 2X^2(t) - 4Y^2(t)) = -2Y^2(t)e^{2t} \leq 0.$$

Donc

$$\boxed{v \text{ est décroissante sur I.}}$$

(b) Par suite, pour $t \geq 0$, on a

$$u(t) = e^{-2t}v(t) \leq e^{-2t}v(0) = e^{-2t}u(0) = (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}.$$

Donc, pour $t \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$. Comme $(x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$. Mais alors, puisque pour $t \geq 0$ on a $0 \leq |X(t)| \leq u(t)$ et $0 \leq |Y(t)| \leq u(t)$, on a encore $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = 0$.

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} (X(t), Y(t)) = (0, 0).}$$

4. Supposons α réel.
Pour $t \in I =]\alpha, +\infty[$, posons $w(t) = e^{4t}u(t)$. w est dérivable sur I et pour $t \in I$,

$$w'(t) = e^{4t}(4u(t) + u'(t)) = e^{4t}(4X^2(t) + 4Y^2(t) - 2X^2(t) - 4Y^2(t)) = 2X^2(t)e^{4t} \geq 0.$$

La fonction w est donc croissante sur I. En particulier, pour $t \in]\alpha, 0]$, $0 \leq w(t) \leq w(0) = u(0)$ et donc $0 \leq u(t) = w(t)e^{-4t} \leq u(0)e^{-4\alpha}$. Ainsi, la fonction u est bornée sur $]\alpha, 0]$.
Mais alors, comme en 2.(b), les fonctions X, Y, X' et Y' sont bornées sur $]\alpha, 0]$ puis comme en 2.(c), les fonctions X et Y admettent une limite réelle en α et enfin, comme en 2.(d), on peut construire une solution de (S) sur un intervalle contenant strictement I ce qui contredit le caractère maximal de (I, X, Y). Donc

$$\boxed{\alpha = -\infty.}$$

