**Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE**

**Epreuve de Mathématiques A PC**

# 1 Première partie : Etude de l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{A}_a & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \mapsto & X(X+1)P''(X)+(aX-1)P'(X) \end{array}.$$

### 1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_a$.

**1.1.1)** • Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $X(X+1)P''(X)$ et $(aX-1)P'(X)$ sont dans $\mathbb{R}_3[X]$ et finalement $\mathcal{A}_a(P)$. $\mathcal{A}_a$ est donc une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

• Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(\lambda P+\mu Q) &= X(X+1)(\lambda P+\mu Q)''+(aX-1)(\lambda P+\mu Q)' \\ &= \lambda(X(X+1)P''+(aX-1)P')+\mu(X(X+1)Q''+(aX-1)Q')=\lambda\mathcal{A}_a(P)+\mu\mathcal{A}_a(Q). \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\mathcal{A}_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X]).}$$

**1.1.2)** On a $\mathcal{A}_a(1)=0$, $\mathcal{A}_a(X)=aX-1$, $\mathcal{A}_a(X^2)=2X(X+1)+(aX-1)(2X)=(2+2a)X^2$ et $\mathcal{A}_a(X^3)=6X^2(X+1)+(aX-1)(3X^2)=(6+3a)X^3+3X^2$. Donc

$$\boxed{M_a=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a \end{pmatrix}.}$$

**1.1.3) a)** $M_{-4}$ est une matrice triangulaire et donc les valeurs propres de $M_{-4}$ sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, $M_{-4}$ admet $0$ et $-4$ pour valeurs propres simples et $-6$ pour valeur propre double.
On sait que $M_{-4}$ est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ (ce qui est le cas) et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. Cette dernière condition est automatiquement vérifiée par une valeur propre simple. Donc,

$$M_{-4} \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(M_{-4}+6I_4))=2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)=4-2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)=2.$$

Or $M_{-4}+6I_4=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de $M_{-4}+6I_4$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)\geq 2$ puis la dernière colonne de $M_{-4}+6I_4$ n'est pas une combinaison linéaire des deux premières (car sa troisième composante est non nulle) et donc $\mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)\geq 3$ (plus précisément, on a $\mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)=3$ car la troisième colonne de $M_{-4}+6I_4$ est nulle et donc $\dim(\mathrm{Ker}(M_{-4}+6I_4))=1$). En particulier, $\mathrm{rg}(M_{-4}+6I_4)\neq 2$ et on a montré que

$$\boxed{M_{-4} \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

**b)** On a déjà $\mathrm{Sp}(M_{-4})=(0,-4,-6,-6)$.

• **Sous-espace propre associé à la valeur propre** $0$. Le polynôme $1$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4})$ qui est de dimension $1$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4})=\mathrm{Vect}(1)=\mathbb{R}_0[X].}$$

 

• **Sous-espace propre associé à la valeur propre** $-4$**.** $\mathcal{A}_{-4}(4X+1) = (-4X-1)\times 4 = -4(4X+1)$ et donc $4X+1$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4}+4I_4)$ qui est de dimension 1. Par suite

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4}+4I_4) = \mathrm{Vect}(4X+1).}$$

• **Sous-espace propre associé à la valeur propre** $-4$**.** D'après a), on sait que $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4}+6I_4)$ qui est de dimension 1. Or, $\mathcal{A}_{-4}(X^2) = -6X^2$ (lu en troisième colonne de $M_{-4}+6I_4$).

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4}+6I_4) = \mathrm{Vect}(X^2).}$$

**1.1.4) a)** $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_a) = (0, a, 2+2a, 6+3a)$.
**b)** $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre multiple si et seulement si $a$ vérifie l'une des conditions suivantes :

- $a = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0) = (0,0,2,6)$ et $\mathcal{A}_0$ admet une valeur propre double à savoir $0$.
- $2+2a = 0$ ou encore $a = -1$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_{-1}) = (0,-1,0,3)$ et $\mathcal{A}_{-1}$ admet une valeur propre double à savoir $0$.
- $6+3a = 0$ ou encore $a = -2$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_{-2}) = (0,-2,-2,0)$ et $\mathcal{A}_{-2}$ admet deux valeurs propres doubles à savoir $0$ et $-2$.
- $a = 2+2a$ ou encore $a = -2$. Ce cas vient d'être étudié.
- $a = 6+3a$ ou encore $a = -3$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_{-3}) = (0,-3,-4,-3)$ et $\mathcal{A}_{-3}$ admet une valeur propre double à savoir $-3$.
- $2+2a = 6+3a$ ou encore $a = -4$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_{-4}) = (0,-4,-6,-6)$ et $\mathcal{A}_{-4}$ admet une valeur propre double à savoir $-4$.

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ admet une valeur propre double si et seulement si } a \in \{-4,-3,-2,-1,0\}.}$$

**c)** D'après ce qui précède

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ n'admet jamais une valeur propre triple.}}$$

**1.1.5)** Déjà, quand $a \notin \{-4,-3,-2,-1,0\}$, les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$ sont simples et donc $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.

- Si $a = -4$, on a déjà vu que $\mathcal{A}_a$ n'est pas diagonalisable.
- Si $a = 0$, $0$ est valeur propre double. Or $\mathrm{rg}(M_0) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(M_0)) = 1 \neq 2$.

  Dans ce cas, $\mathcal{A}_a$ n'est pas diagonalisable.
- Si $a = -1$, $0$ est la seule valeur propre double. Or, $\mathrm{rg}(M_{-1}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$.

  Dans ce cas, $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.
- Si $a = -2$, il y a deux valeurs propres doubles, $0$ et $-2$. Or, $\mathrm{rg}(M_{-2}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

  et $\mathrm{rg}(M_{-2}+2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$.
  Dans ce cas, $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.
- Si $a = -3$, $-3$ est la seule valeur propre double. Or, $\mathrm{rg}(M_{-3}+3I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

  Dans ce cas, $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a \in \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}.}$$

 

**1.1.6)** Dans tous les cas, le degré de $\mathcal{A}_a(P)$ est inférieur ou égal au degré de $P$.

• Si $P$ est de degré 3, le coefficient de $X^3$ dans $\mathcal{A}_a(P)$ est $(6+3a)\text{dom}(P)$. Par suite, $\mathcal{A}_a(P)$ est de degré 3 si et seulement si $6+3a \neq 0$ ou encore $a \neq -2$.

• Si $P$ est de degré 2, le coefficient de $X^2$ dans $\mathcal{A}_a(P)$ est $(2+2a)\text{dom}(P)$. Par suite, $\mathcal{A}_a(P)$ est de degré 2 si et seulement si $2+2a \neq 0$ ou encore $a \neq -1$.

• Si $P$ est de degré 1, le coefficient de $X$ dans $\mathcal{A}_a(P)$ est $a\text{dom}(P)$. Par suite, $\mathcal{A}_a(P)$ est de degré 1 si et seulement si $a \neq 0$.

En résumé, le degré de $\mathcal{A}_a(P)$ est le degré de $P$ pour tout polynôme non constant de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $a \notin \{-2,-1,0\}$.

**1.2 Etude de cas particuliers** Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\}$.

**1.2.1)** Pour toute valeur de $a$, les polynômes constants sont dans $\text{Ker}(\mathcal{A}_a)$. D'autre part, d'après la question précédente, l'image d'un polynôme non constant par $\mathcal{A}_a$ est un polynôme de même degré et en particulier n'est pas le polynôme nul. $\text{Ker}(\mathcal{A}_a)$ est donc constitué des polynômes constants.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\},\ \text{Ker}(\mathcal{A}_a) = \text{Vect}(1).}$$

**1.2.2)** D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(\mathcal{A}_a)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}_a)) = 4 - 1 = 3$. De plus,

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\mathcal{A}_a) &= \text{Vect}(\mathcal{A}_a(1), \mathcal{A}_a(X), \mathcal{A}_a(X^2), \mathcal{A}_a(X^3)) = \text{Vect}(\mathcal{A}_a(1), \mathcal{A}_a(X), \mathcal{A}_a(X^2), \mathcal{A}_a(X^3)) \\
&= \text{Vect}(0, -1+aX, (2+2a)X^2, (6+3a)X^3 + 3X^2) = \text{Vect}(-1+aX, (2+2a)X^2, (6+3a)X^3 + 3X^2) \\
&= \text{Vect}(-1+aX, X^2, (6+3a)X^3 + 3X^2) \text{ (car } 2+2a \neq 0) \\
&= \text{Vect}(-1+aX, X^2, (6+3a)X^3 + 3X^2 - 3X^2) = \text{Vect}(-1+aX, X^2, (6+3a)X^3) \\
&= \text{Vect}(-1+aX, X^2, X^3) \text{ (car } 6+3a \neq 0).
\end{aligned}$$

Finalement, $\text{Im}(\mathcal{A}_a) = \text{Vect}(-1+aX, X^2, X^3)$. De plus, puisque $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$ est de dimension 3, $(-1+aX, X^2, X^3)$ est une base de $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\},\ \text{Im}(\mathcal{A}_a) = \text{Vect}(-1+aX, X^2, X^3).}$$

**1.2.3)** Soit $p \in [\![0,3]\!]$. Notons $(E_p)$ l'équation de l'énoncé. On a

$$(E_p) \text{ a au moins une solution si et seulement si } X^p \in \text{Im}(\mathcal{A}_p).$$

La question précédente montre qu'un élément de $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$ est de la forme $\alpha(-1+aX) + \beta X^2 + \gamma X^3$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. Un tel polynôme est de degré au plus 1 si et seulement si $\beta = \gamma = 0$ et donc les éléments de $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$ de degré au plus 1 sont les polynômes de la forme $\alpha(-1+aX)$. Maintenant, un tel polynôme ne peut être ni 1, ni $X$ et donc les équations $(E_0)$ et $(E_1)$ n'ont pas de solution.
Sinon, la question précédente montre que $(E_2)$ et $(E_3)$ ont chacune au moins une solution à savoir respectivement
$P_2 = \dfrac{1}{2+2a}X^2$ et $P_3 = \dfrac{1}{6+3a}X^3 - \dfrac{1}{(2+a)(2+2a)}X^2$.
Soient alors $p \in \{2,3\}$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E_p) &\Leftrightarrow \mathcal{A}_a(P) = \mathcal{A}_a(P_p) \Leftrightarrow \mathcal{A}_a(P - P_p) = 0 \Leftrightarrow P - P_p \in \text{Ker}(\mathcal{A}_a \Leftrightarrow P - P_p \in \mathbb{R}_0[X] \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ P = P_p + \lambda.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{Si } p \in \{0,1\},\ (E_p) \text{ n'a pas de solution.} \\
\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sont les polynômes de la forme } \dfrac{1}{2+2a}X^2 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}. \\
\text{Les solutions de } (E_3) \text{ sont les polynômes de la forme } \dfrac{1}{6+3a}X^3 - \dfrac{1}{(2+a)(2+2a)}X^2 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{array}}$$

 

## 2 Deuxième partie : Quelques propriétés de l'application :

$$\mathcal{A}_{(a,n)} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) \end{array}.$$

**2.1)** L'image par $\mathcal{A}_{(a,n)}$ d'un polynôme de degré au plus $n$ est un polynôme de degré au plus $n$. La linéarité de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ se démontre comme à la question 1.1.1). Finalement,

$$\boxed{\mathcal{A}_{(a,n)} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]).}$$

**2.2)** $\mathcal{A}_{(a,n)}(1) = 0$ et $\mathcal{A}_a(a,n)(X) = aX - 1$ et si $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\mathcal{A}_{(a,n)}(X^k) = X(X+1)k(k-1)X^{k-2} + (aX-1)(kX^{k-1}) = k(a+k-1)X^k + k(k-2)X^{k-1}$$

(ce qui reste vrai quand $k = 1$). On en déduit $M_a$ la matrice de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ :

$$\boxed{M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2(1+a) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (n-1)(n-3) & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n(n-2) \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n(n+a-1) \end{pmatrix}.}$$

**2.3)** Puisque la matrice $M_a$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_a) = (k(a+k-1))_{0 \le k \le n}.}$$

**2.4)** Soient $k$ et $l$ deux entiers naturels tels que $0 \le k < l \le n$.

$$l(a+l-1) - k(a+k-1) = (l^2 - k^2) + (a-1)(l-k) = (l-k)(k+l+a-1).$$

Comme $l > k$, on a $k + l + a - 1 \ge 1 + a - 1 = a > 0$ et aussi $l - k > 0$. On en déduit que $l(a+l-1) - k(a+k-1) > 0$ et en particulier que $k(a+k-1) \neq l(a+l-1)$.
Ainsi, si $a > 0$, les valeurs propres de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ sont deux à deux distinctes. On sait alors que $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est diagonalisable.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall a \in ]0, +\infty[,\ \mathcal{A}_{(a,n)} \text{ est diagonalisable.}}$$

Si $a = 0$ et $n = 3$, on sait déjà que $\mathcal{A}_{(0,3)}$ n'est pas diagonalisable (question 1.1.5)).
Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque. Les valeurs propres de de $\mathcal{A}_{(0,n)}$ sont les $k(k-1)$, $k \in [\![0, n]\!]$.
Or, pour $0 \le k < l \le n$,

$$k(k-1) = l(l-1) \Leftrightarrow (l-k)(k+l-1) = 0 \Leftrightarrow k + l = 1 \Leftrightarrow k = 0 \text{ et } l = 1.$$

$\mathcal{A}_{(0,n)}$ admet donc $n-1$ valeurs propres simples et une valeur propre double $0$ (obtenue pour $k = 0$). On en déduit que $\mathcal{A}_{(0,n)}$ est diagonalisable si et seulement si $M_a$ est une matrice de rang $n-1$. Mais le rang de $M_a$ est encore le rang de la matrice obtenue en lui retirant sa première colonne (qui est nulle) puis sa deuxième ligne (qui est nulle). On obtient alors une matrice carrée de format $n$, triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls. Cette matrice est donc de rang $n$ et il en est de même de $M_a$. Ceci montre que $\mathcal{A}_{(0,n)}$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},,\ \mathcal{A}_{(a,0)} \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

 

## 3 Troisième partie : Recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle

**3.1)** On sait que la somme d'une série entière est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence. En particulier, si $f \in \mathcal{E}$, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,1[$.

**3.2)** **a)** Pour $x \in ]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
x(x+1)f''(x)+(ax-1)f'(x)-af &= x(x+1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+(ax-1)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-a\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}+a\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-a\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)+an-a]a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}[n(n-1)-n]a_nx^{n-1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)(n+a)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-2)a_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)(n+a)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n-1)a_{n+1}x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}((n-1)(n+a)a_n+(n-1)(n+1)a_{n+1})x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a(f)=af &\Leftrightarrow \forall x\in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n-1)(n+a)a_n+(n-1)(n+1))x^n=0\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ (n-1)((n+a)a_n+(n+1)a_{n+1})=0.
\end{aligned}$$

**b)** Pour $n \geq 1$, on a $(n-2)((a+n-1)a_{n-1}+na_n)=0$.
Maintenant, si $n \geq 3$, on a $n-2 \neq 0$ et donc $(a+n-1)a_{n-1}+na_n=0$ puis $a_n=-\dfrac{a+n-1}{n}a_{n-1}$.
Soit donc $n \geq 3$. On a

$$a_n=\left(-\frac{a+n-1}{n}\right)\left(-\frac{a+n-2}{n-1}\right)\dots\left(-\frac{a+2}{2}\right)a_2=(-1)^{n-2}\frac{\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!/2}a_2=\frac{2(-1)^n\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!}a_2.$$

$$\boxed{\forall n\geq 3,\ a_n=\frac{2(-1)^n\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!}a_2.}$$

Supposons de plus $a_0=a_1=0$ et $a_2=1$. Alors, pour $n\geq 3$, $a_n=\dfrac{2(-1)^n\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!}$.

Dans ce cas, la série entière est un polynôme si et seulement si le produit $\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)$ est nul à partir d'un certain rang ce qui équivaut au fait que $a$ est un entier relatif inférieur ou égal à $-2$.
Posons donc $a=-p$ avec $p$ entier supérieur ou égal à 2.

- Si $n-1<p$ alors $\forall k\in [\![2,n-1]\!]$, $k+a\neq 0$ et donc $a_n\neq 0$.
- Si $n-1\geq p$, le produit contient le facteur $p-p$ et est donc nul. Il en est de même de $a_n$.

En résumé, $a_p$ n'est pas nul mais les coefficients $a_n$ sont nuls pour $n\geq p+1$. $f$ est donc un polynôme de degré $p$. Enfin

 

$$\text{dom}(f) = a_p = \frac{2(-1)^p \prod_{k=1}^{p-1}(k-p)}{p!} = \frac{2(-1)^p \times (-1)^{p-1}\prod_{k=1}^{p-1}(p-k)}{p!} = \frac{-2(p-1)!}{p!} = -\frac{2}{p}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est un polynôme si et seulement si } a \in \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2]. \\ \text{Dans ce cas, } f \text{ est un polynôme de degré } -a \text{ et de coefficient dominant } \dfrac{2}{a}. \end{array}}$$

**c)** D'après ce qui précède, si $a \in \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2]$, le rayon de convergence de la série de somme $f$ est infini.
Sinon, les coefficients $a_n$ sont tous non nuls pour $n \geq 2$ et pour $x \neq 0$ on a d'après 3.2)a)

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|n+a|}{n+1}|x|.$$

Cette expression tend vers $|x|$ quand $n$ tend vers $+\infty$. D'après la règle de d'ALEMBERT, la série numérique de terme général $a_n x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. On en déduit que la série entière de somme $f$ a un rayon de convergence égal à 1.

$$\boxed{\text{Si } a \notin \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2],\ R_a = 1 \text{ et si } a \in \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2],\ R_a = +\infty.}$$

**3.3)** D'après 3.2)a), les fonctions de $\mathcal{E}$ solutions sont les fonctions de $\mathcal{E}$ tels que $aa_0 + a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $(n+a)a_n + (n+1)a_{n+1} = 0$.
D'après 3.2.b), sous l'hypothèse $f \in \mathcal{E}$ (c'est-à-dire sous l'hypothèse $f$ est somme sur $]-1,1[$ d'une série entière de rayon supérieur ou égal à 1),

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow \exists (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = a_0(1-ax) + a_2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} x^n.$$

Mais la question 3.2.c) montre que les fonctions ci-dessus sont effectivement dans $\mathcal{E}$ et donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Les fonctions } f \text{ de } \mathcal{E} \text{ solution de } \mathcal{D}_a(f) = af \text{ sont les fonctions de la forme} \\ x \mapsto \lambda(1-ax) + \mu \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} x^n,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2. \end{array}}$$

**3.4)** $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 donné.

**1er cas.** Si $a \notin \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2]$, on a vu que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^m \prod_{k=2}^{m-1}(k+a)}{m!} x^m$ n'est pas polynomiale. On en déduit que les deux fonctions $x \mapsto 1-ax$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^m \prod_{k=2}^{m-1}(k+a)}{m!} x^m$ forment une famille libre et donc que $\dim(\text{Ker}(\mathcal{D}_a - a\text{Id}_{\mathcal{E}})) = 2$.
D'autre part, on a $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathcal{E}$. Comme les fonctions polynomiales éléments de $\mathcal{E}$ sont les fonctions telles que $\mu = 0$ c'est-à-dire les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda(1-ax)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et que les fonctions $x \mapsto \lambda(1-ax)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont effectivement dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - a\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.

**2ème cas.** Si $a \in \mathbb{Z}\cap]-\infty,-2]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^m \prod_{k=2}^{m-1}(k+a)}{m!} x^m$ est polynomiale de degré $-a \geq 2$ (d'après 3.2)b)) et encore une fois les deux fonctions $x \mapsto 1-ax$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^m \prod_{k=2}^{m-1}(k+a)}{m!} x^m$ forment une famille libre de sorte que $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{D}_a - a\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})) = 2$.

Maintenant, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2(-1)^m \prod_{k=2}^{m-1}(k+a)}{m!} x^m$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $-a \leq n$ ou encore $a \geq -n$. Donc, si $a \leq -n$, $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 2$ (et en particulier $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{D}_a - a\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$) et si $-n < a \leq -2$, $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$..

# 4 Quatrième partie : Résolution d'une équation différentielle

**4.1)** Soit $f$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$

$$f''(x) = -\frac{ax-1}{x(x+1)}f'(x) + \frac{2(a+1)}{x(x+1)}f(x).$$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- C'est vrai pour $p = 1$.
- Soit $p \geq 1$. Supposons $f$ $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction $x \mapsto -\dfrac{ax-1}{x(x+1)}f'(x) + \dfrac{2(a+1)}{x(x+1)}f(x)$ est $p-1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc la fonction $f''$ est $p-1$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ou encore $f$ est $p+1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a montré par récurrence que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Toute solution de } \mathcal{E} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

**4.2)** Puisque $\forall x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x^2}\varphi(x)$ et que $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\psi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après la formule de Leibniz, pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} x(x+1)\varphi''(x) + (ax-1)\varphi'(x) - 2(a+1)\varphi(x) &= x(x+1)(2\psi(x) + 4x\psi'(x) + x^2\psi''(x)) + (ax-1)(2x\psi(x) + x^2\psi'(x)) \\ &\quad - 2(a+1)x^2\psi(x) \\ &= x^3(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x^3 + 3x^2)\psi'(x). \end{aligned}$$

Par suite, $\varphi$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\forall x > 0$, $x^3(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x^3 + 3x^2)\psi'(x) = 0$ ou encore $\forall x > 0$, $x(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x+3)\psi'(x) = 0$.

$$\boxed{\varphi \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \psi' \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } x(x+1)u' + ((4+a)x+3)u = 0.}$$

La question 1.2.3) permettait de prévoir que la fonction $x \mapsto x^2$ était une solution particulière de $(E)$ et donc la méthode proposée par l'énoncé n'est autre que la méthode du cours. Le résultat était prévisible.

**4.3)** Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{(4+a)x+3}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$ on a

$$\frac{(4+a)x+3}{x(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{a+1}{x+1},$$

et donc une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{(4+a)x+3}{x(x+1)}$ est la fonction $x \mapsto 3\ln x + (a+1)\ln(x+1) = \ln\left(x^3(x+1)^{a+1}\right)$.

Soit alors $u$ une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} u \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ u'(x) + \frac{(4+a)x+3}{x(x+1)}u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ e^{\ln(x^3(x+1)^{a+1})}u'(x) + \frac{(4+a)x+3}{x(x+1)}e^{\ln(x^3(x+1)^{a+1})}u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (x^3(x+1)^{a+1}u)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ x^3(x+1)^{a+1}u(x) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ u(x) = \frac{\lambda}{x^3(x+1)^{a+1}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ \psi'(x) = \frac{\lambda}{x^3(x+1)^{a+1}}.}$$

 

**4.4)** On suppose de plus $a = -4$.

**a)** D'après ce qui précède, $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0,\ \psi'(x) = \dfrac{\lambda}{x^3(x+1)^{-3}} = \lambda\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3 = \lambda\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Mais alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0,\ \psi(x) = \lambda\left(x + 3\ln x - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\right) + \mu$ et donc

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0,\ \varphi(x) = \lambda\left(x^3 + 3x^2\ln x - 3x - \frac{1}{2}\right) + \mu x^2.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda\left(x^3 + 3x^2\ln x - 3x - \frac{1}{2}\right) + \mu x^2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

**b)** Déjà $\dim(\text{Ker}(\Delta_{-4} + 6\text{Id}_{C^\infty})) = 2$. Maintenant, la restriction à $]0, +\infty[$ d'un élément de $\text{Ker}(\mathcal{A}_{-4} + 6\text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$ est une fonction polynomiale solution de $(E)$. Les foncions polynomiales solutions de $(E)$ sont les solutions correspondant à $\lambda = 0$ et donc les fonctions de la forme $x \mapsto \mu x^2$. Comme $X^2$ est effectivement dans $\text{Ker}(\mathcal{A}_{-4} + 6\text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$, on a $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}_{-4} + 6\text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})) = 1$.

 