Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I.

1. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)$ est continue sur $[0,1[$ et donc localement intégrable sur $[0,1[$.
De plus, quand t tend vers 1, $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{t}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$ et donc $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable au voisinage de 1, on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)$ est intégrable au voisinage de 1.
Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)$ est intégrable sur $[0,1[$ et donc $g(u)$ existe. On a montré que

$$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Soient $u \in]1,+\infty[$ puis $\alpha \in]0,1[$.

$$\int_\alpha^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_\alpha^1 = \sqrt{1-\alpha^2},$$

et donc

$$\int_\alpha^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1-\frac{1}{u}.$$

Maintenant, $u > 1$ et donc $1-\dfrac{1}{u} \in]0,1[$. Par suite, l'équation $\alpha^2 = 1-\dfrac{1}{u}$ admet une et une seule solution dans $]0,1[$ à savoir $\alpha = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$.

$$\boxed{\forall u > 1,\ \alpha_u = \sqrt{1-\frac{1}{u}}.}$$

(c) Soit $u > 1$.
• La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est dérivable sur $[0,\alpha_u]$ et pour $t \in [0,\alpha_u]$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = 1 \times (1-t^2)^{-1/2} + t \times (-\frac{1}{2})(-2t)(1-t^2)^{-3/2} = \frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

• Les deux fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto -\dfrac{\cos(tu)}{u}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,\alpha_u]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,dt &= \left[-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\cos(tu)}{u}\right]_{t=0}^{t=\alpha_u} - \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \times -\frac{\cos(tu)}{u}\,dt \\ &= -\frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\frac{\cos(u\alpha_u)}{u} + \frac{1}{u}\int_0^{\alpha_u} \frac{\cos(tu)}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt.\end{aligned}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
|g(u)| &= \left|\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,dt + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,dt\right| \leq \left|\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,dt\right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}|\sin(tu)|\,dt \\
&\leq \left|\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,dt\right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left|-\frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\frac{\cos(u\alpha_u)}{u} + \frac{1}{u}\int_0^{\alpha_u} \frac{\cos(tu)}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt\right| + \frac{1}{\sqrt{u}} \\
&\leq \frac{\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{u}\int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{u}\left[\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right]_0^{\alpha_u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{2\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{\sqrt{u}}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, $1-\alpha_u^2 = \dfrac{1}{u}$ et de plus $0 < \alpha_u < 1$. On en déduit que

$$|g(u)| \leq \frac{2\times 1}{u\sqrt{\dfrac{1}{u}}} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

$$\boxed{\forall u > 1,\ |g(u)| \leq \frac{3}{\sqrt{u}}.}$$

2. **(a)** Une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon π est $x^2+y^2=\pi^2$. Pour des ordonnées positives, cette équation s'écrit encore $y=\sqrt{\pi^2-x^2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = \sqrt{\pi^2-x^2}.}$$

(b) Théorème de Dirichlet. Si g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, alors la série de Fourier de g converge (normalement) sur $\mathbb{R}$ et sa somme en un réel x est $\dfrac{g(x^-)+g(x^+)}{2}$. En particulier, si g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique, la série de Fourier de g converge (normalement) vers g sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas à f car f n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ (puisque $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f'(x) = -\infty$).

3. **(a)** f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer les coefficients de Fourier de f. De plus, f est paire. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $b_n(f)=0$ et que pour tout entier naturel n,
$a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2-x^2}\cos(nx)\,dx$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2-x^2}\cos(nx)\,dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons déjà $x=\pi t$. On obtient $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\pi^2-\pi^2t^2}\cos(n\pi t)\,\pi dt = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos(n\pi t)\,dt$.

Soit alors $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $t\mapsto\sqrt{1-t^2}$ et $t\mapsto \dfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1-\varepsilon]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-t^2}\cos(n\pi t)\,dt &= \left[\sqrt{1-t^2}\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\,dt \\
&= \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\frac{\sin(n\pi(1-\varepsilon))}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(n\pi t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Quand ε tend vers 0, on obtient

$$a_n(f) = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos(n\pi t)\,dt = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(n\pi t)\,dt = \frac{2}{n\pi}g(n\pi).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{n\pi}g(n\pi).}$$

4. (a) La série de FOURIER de f est la suite de fonctions de terme général $x \mapsto S_n(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx)$. Mais pour tout réel x et tout entier naturel non nul k, les questions 1.(c) et 3.(b) fournissent

$$|a_k(f)\cos(kx)| \leq |a_k(f)| = \frac{2}{k\pi}|g(k\pi)| \leq \frac{2}{k\pi}\frac{3}{\sqrt{k\pi}} = \frac{6}{\pi^{3/2}k^{3/2}}.$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série numérique convergente (car $\dfrac{3}{2} > 1$). Ceci montre que la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_k(f)\cos(kx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ou encore que

$$\boxed{\text{la série de FOURIER de f converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

Ce résultat ne contredit pas 2.(b) car le théorème de DIRICHLET ne dit rien des fonctions qui ne sont pas de classe C^1 par morceaux.

(b) Ainsi, la série de FOURIER de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et en particulier uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on note g. La fonction g est alors continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par définition de la convergence uniforme, la suite $(\|S_n(f) - g\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0 (où $\|S_n(f) - g\|_\infty = \sup\{|S_n(f)(x) - g(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$). Maintenant,

$$\|S_n(f) - g\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(S_n(f)(x) - g(x))^2\,dx} \leq \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\|S_n(f) - g\|_\infty^2\,dx} = \sqrt{2}\|S_n(f) - g\|_\infty.$$

Par suite, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n(f) - g\|_2 = 0$ ce qui montre que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction g en moyenne quadratique.
Maintenant, le théorème de PARSEVAL, appliqué à la fonction f qui est bien continue par morceaux et 2π-périodique, montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n(f) - f\|_2 = 0$. Enfin, pour tout entier n on a

$$\|f - g\|_2 \leq \|S_n(f) - f\|_2 + \|S_n(f) - g\|_2,$$

et quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\|f - g\|_2 = 0$. Puisque f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f = g$ et donc que

$$\boxed{\text{la série de FOURIER de f converge normalement vers f sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice II.

1. (a) Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \mathbb{R}^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)f(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{(f(x,y))^2} = 0 \text{ (car f ne s'annule pas sur } \mathbb{R}^2)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}\right) = 0
\end{aligned}$$

Cette dernière condition équivaut à dire que la fonction $\alpha\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$, définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (car f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$) est constante quand y varie à x fixé (car $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$).
Ceci équivaut à l'existence d'une fonction a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} = a(x)$ ou encore telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$.

(b) Soient φ et ψ deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ puis $f : (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x)\psi(y) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\varphi(x)\psi(y) = a(x)f(x,y),$$

où $a = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'après 1.(a), f est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^2$.

Réciproquement, soit a une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis A une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{-A(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - a(x)e^{-A(x)}f(x,y) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{-A}f)(x,y) = 0\\
&\Rightarrow \exists \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{-A(x)}f(x,y) = \psi(y)\\
&\Leftrightarrow \exists \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{A(x)}\psi(y).
\end{aligned}$$

f est alors de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ où φ et ψ sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$
où φ et ψ sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Si (φ, ψ) est un couple associé à une solution f donnée, les couples $(-\varphi, \psi)$ ou $(2\varphi, \dfrac{1}{2}\psi)$ sont d'autres couples associés à la fonction f. Il n'y a donc pas unicité du couple (φ, ψ) pour une solution f donnée.

(c) Existence. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = \dfrac{1}{h(0)}g(x)h(y)$. f est de la forme du (b) et donc solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \dfrac{1}{h(0)}g(x)h(0) = g(x)$ et pour $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = \dfrac{1}{h(0)}g(0)h(y) = h(y)$. Ceci montre l'existence d'une solution au problème posé.

Unicité. Soit f_1 une solution du problème posé. D'après (b), il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on doit avoir

$$g(x) = f_1(x,0) = \varphi(x)\psi(0),$$

et donc nécessairement pour tout réel x, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\psi(0)}g(x)$. De même, nécessairement pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\psi(y) = \dfrac{1}{\varphi(0)}h(y)$.

On en déduit que nécessairement pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\varphi(0)\psi(0)}g(x)h(y)$.

Enfin, $g(0) = f_1(0,0) = \dfrac{1}{\varphi(0)\psi(0)}g(0)h(0)$ et donc $\varphi(0)\psi(0) = h(0)$ puisque $g(0) \neq 0$. Finalement, nécessairement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = \dfrac{1}{h(0)}g(x)h(y) = f(x,y)$ ce qui montre l'unicité d'une solution au problème posé.

2. (a) Si la fonction f présente un maximum local en (x_0, y_0), alors en particulier les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ présente un maximum local en x_0 et y_0 respectivement.
Réciproquement, supposons que les fonctions $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ présente un maximum local en x_0 et y_0 respectivement. Puisque f est une solution de $(\mathscr{E})$, il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^2 et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Les deux fonctions φ et ψ sont continues sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, les deux fonctions φ et ψ sont ou bien toutes deux strictement positives sur $\mathbb{R}$ ou bien toutes deux strictement négatives $\mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, on écrit $f = (-\varphi)(-\psi)$ ce qui ramène au cas où φ et ψ sont strictement positives sur $\mathbb{R}$.
En résumé, il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^2 et strictement positives sur $\mathbb{R}$ telles que $f = \varphi\psi$.

Par hypothèse, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in]x_0 - r_1, x_0 + r_1[,\ f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \text{ et } \forall y \in]y_0 - r_2, y_0 + r_2[,\ f(x_0,y) \leq f(x_0,y_0).$$

Soit alors$x \in]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$. On a $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ ce qui s'écrit $\varphi(x)\psi(x_0) \leq \varphi(x_0)\psi(x_0)$ et donc $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$ puisque $\psi(x_0) > 0$. De même, pour $y \in]y_0 - r_2, y_0 + r_2[$, on a $\psi(y) \leq \psi(x_0)$.
Mais alors, pour $(x, y) \in]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times]y_0 - r_2, y_0 + r_2[$,

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \leq \varphi(x_0)\psi(x_0) = f(x_0, y_0),$$

(puisque les fonctions φ et ψ sont strictement positives sur $\mathbb{R}$) ce qui montre que f a un maximum local en (x_0, y_0).

f admet un maximum local en (x_0, y_0)
si et seulement si
la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un maximum local en x_0 et la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ admet un maximum local en y_0.

(b) On en déduit que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels f présente un maximum local est de la forme $A \times B$ où $A = \{x_0 \in \mathbb{R}/\ \exists y_0 \in \mathbb{R}/$ la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un maximum local en $x_0\}$ (resp. $B = \{y_0 \in \mathbb{R}/\ \exists x_0 \in \mathbb{R}/$ la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ admet un maximum local en $y_0\}$).

3. (a) Soients $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$ et $H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t + |t|^3 \end{array}$. On a $F = H \circ G$.
G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à deux variables.
Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$, $H(t) = \begin{cases} 2t^3 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$. H est déjà continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour $t \neq 0$, $H'(t) = \begin{cases} 6t^2 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$ et $H''(t) = \begin{cases} 12t \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$. Maintenant, $H'(t)$ et $H''(t)$ ont une limite réelle en 0 à savoir 0. En résumé,

- H est continue sur $\mathbb{R}$,
- H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$,
- H' et H'' ont une limite réelle quand t tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse, H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

F est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée d'une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et d'une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Sur $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ xy < 0\}$, on a $F(x, y) = 0$ et il est immédiat que F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{D}$.
Sur $\mathscr{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ xy > 0\}$, on a $F(x, y) = 2x^3y^3$ et donc

$$F(x, y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (2x^3y^3)(18x^2y^2) - (6x^2y^3)(6x^3y^2) = 36(x^5y^5 - x^5y^5) = 0,$$

et F vérifie aussi l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{D}'$. Finalement, F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^2$ privé des deux axes de coordonnées. Mais alors, par continuité de F, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en chaque point de ces axes, F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Supposons par l'absurde qu'il existe deux fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. En particulier

$$\varphi(1)\psi(-1) = F(1, -1) = (-1)^3 + |-1|^3 = 0.$$

Mais si $\varphi(1) = 0$, alors $F(1, 1) = \varphi(1)\psi(1) = 0$ ce qui n'est pas puisque $F(1, 1) = 2$ et si $\psi(-1) = 0$ alors $F(-1, -1) = 0$ ce qui n'est pas puisque $F(-1, -1) = 2$. Donc

Il n'existe pas de fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Exercice III.

1. (a) On note tout d'abord que π est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$. Notons π' la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$.
Soient A et B deux points du plan. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\pi(\overrightarrow{AB})\|^2 + \|\pi'(\overrightarrow{AB})\|^2 \geq \|\pi(\overrightarrow{AB})\|^2 = \|\overrightarrow{p(A)p(B)}\|^2 = p(A)p(B)^2,$$

avec égalité si et seulement si $\pi'(\overrightarrow{AB}) = 0$ ou encore $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{k}^{\perp}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall (A,B) \in E^2,\ p(A)p(B) \leq AB,\\ \forall (A,B) \in E^2,\ p(A)p(B) = AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{k}^{\perp}.\end{array}}$$

(b) D est l'ensemble des $A + \lambda\overrightarrow{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $p(D)$ est l'ensemble des $p(A) + \lambda\pi(\overrightarrow{u})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$, $\pi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et dans ce cas, $p(D)$ est le singleton $\{p(A)\}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{k}$, $\pi(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$ et dans ce cas, $p(D)$ est la droite passant par le point $p(A)$ et dirigée par le vecteur $\pi(\overrightarrow{u})$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } D \text{ est parallèle à } \Delta,\ p(D) \text{ est le point } p(A).\\ \text{Si } D \text{ n'est pas parallèle à } \Delta,\ p(D) \text{ est la droite passant par } p(A) \text{ et dirigée par } \pi(\overrightarrow{u}).\end{array}}$$

2. (a) Puisque D n'est pas parallèle à Δ, $p(D)$ est une droite d. Notons $p_{/D}$ la restriction de p à D. $p_{/D}$ transforme l'espace affine D de dimension 1 en d qui est un espace affine de même dimension. On sait alors que p réalise une bijection de D sur d. En particulier, puisque $h \in d = p(D)$, il existe un et un seul point H de D tel que $p(H) = h$.

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul point } H \text{ de } D \text{ tel que } p(H) = h.}$$

(b) Si les quatre points O, h, H et H' sont deux à deux distincts, le quadrilatère $OhH'H$ a trois angles droits et est donc un rectangle. En particulier, $\overrightarrow{Oh} = \overrightarrow{H'H}$ et $Oh = HH'$. Ce dernier résultat reste vrai quand $h = O$ (et $H = H'$) ou $h = H$ (et $O = H'$).

Soit alors $(M,N) \in \Delta \times D$. On a

$$MN^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'N})^2 = \left(\overrightarrow{HH'} + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'N}\right)\right)^2 \quad (*).$$

Déjà, $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'N} = 0$ car $\overrightarrow{H'N} \in \overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{HH'} \in \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$.
Ensuite, notons $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d puis P le plan contenant d et de direction $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k})$. Puisque $\overrightarrow{P}$ contient $\overrightarrow{k}$, P est parallèle à Δ et donc, puisque P contient d, P contient également D. Maintenant, le vecteur $\overrightarrow{Oh}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{k}$ et donc est un vecteur normal au plan P. Ce vecteur est alors orthogonal à toute droite de ce plan et en particulier à la droite D. Puisque les points M et H sont sur D, on en déduit que $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{Oh}.\overrightarrow{MH} = 0$.

Finalement, le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{H'N}$ et donc au vecteur $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'N}$. L'égalité $(*)$ et le théorème de PYTHAGORE fournissent alors

$$MN^2 = HH'^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'N}\right)^2 \geq HH'^2.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (M,N) \in D \times \Delta,\ MN \geq HH' = Oh.}$$

3. (a) Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $x^2 + y^2 = 1$. Soit alors $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{C}$ c'est-à-dire tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$. La règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent à $\mathscr{C}$ en M_0 :

$$xx_0 + yy_0 = 1.$$

Les plans tangents à $\mathscr{C}$ sont donc les plans d'équation $xx_0 + yy_0 = 1$ avec $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ou encore les plans d'équation $x\cos\omega + y\sin\omega = 1$ avec $\omega \in]-\pi, \pi]$.

$$\boxed{\text{Les plans tangents à } \mathscr{C} \text{ sont les plans d'équation } x\cos\omega + y\sin\omega = 1,\ \omega \in]-\pi,\pi].}$$

(b) Soit (D) une droite telle que $d(\Delta, D) = 1$.

1er cas. Si D est parallèle à Δ, alors D est une génératrice du cylindre $\mathscr{C}$ et est bien sûr contenue dans un plan tangent à $\mathscr{C}$. Plus précisément, $\mathscr{D}$ admet un système d'équations de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right.$. La distance de D à Δ est par exemple la distance du point O au point $(a, b, 0)$ et la condition $d(D, \Delta) = 1$ se traduit par $a^2 + b^2 = 1$. Par suite, il existe un réel $\omega \in]-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos\omega$ et $b = \sin\omega$ de sorte que la droite D admet un système d'équations de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = \cos\omega \\ y = \sin\omega \end{array}\right.$. D est alors contenue dans le plan d'équation $x\cos\omega + y\sin\omega = 1$ qui est un plan tangent à $\mathscr{C}$ d'après la question précédente.

2ème cas. Si D n'est pas parallèle à Δ, avec les notations de la question 2., on a $HH' = 1$. Les coordonnées de H' sont de la forme $(0, 0, c)$ et donc les coordonnées de H sont de la forme $(\cos\omega, \sin\omega, c)$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à D, D est contenue dans le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{HH'}$. Une équation de ce plan est $\cos\omega(x - \cos\omega) + \sin\omega(y - \sin\omega) + 0(z - c) = 0$ ou encore $x\cos\omega + y\sin\omega = 1$. De nouveau, ce plan est un plan tangent à $\mathscr{C}$.

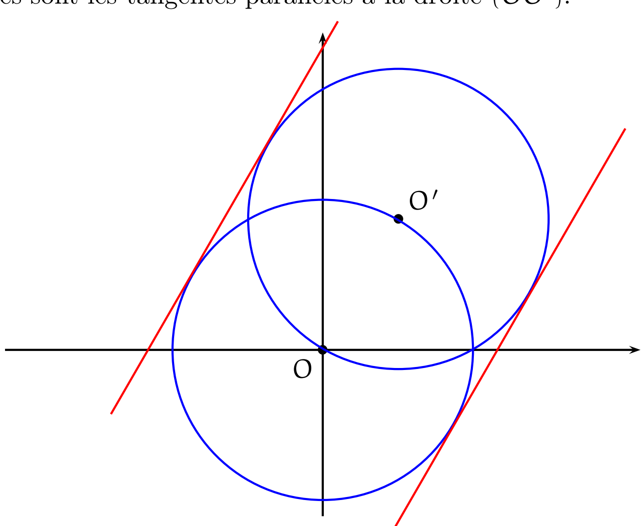
$$\boxed{\text{Toute droite } D \text{ telle que } d(D, \Delta) = 1 \text{ est contenue dans un plan tangent à } \mathscr{C}.}$$

(c) La droite D d'équations $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$ est contenue dans le plan d'équation $x = 1$ qui est un plan tangent à $\mathscr{C}$ $(\omega = 0)$. D est parallèle à Δ et la distance de D à Δ est par exemple la distance de O au point $(1, 1, 0)$ et est donc égale à $\sqrt{2}$. Donc, une droite D contenue dans un plan tangent à $\mathscr{C}$ ne vérifie pas nécessairement $d(D, \Delta) = 1$.

4. (a) Travaillons dans le plan π avec deux coordonnées. L'équation générale d'une tangente T_ω au cercle Γ est $x\cos\omega + y\sin\omega = 1$, $\omega \in]-\pi, \pi]$ (par le même travail que celui effectué en dimension 3 en 3.(a)).
Maintenant, les coordonnées du point O' sont de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in]-\pi, \pi]$. Par suite,

$$\begin{aligned} T_\omega \text{ tangente à } \Gamma' &\Leftrightarrow d(O', T_\omega) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega - 1|}{\sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta - \omega) - 1 = 1 \text{ ou } \cos(\theta - \omega) - 1 = -1 \Leftrightarrow \cos(\theta - \omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \in \theta + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux tangentes communes : les deux droites t_1 et t_2 d'équations respectives $-x\sin\theta + y\cos\theta = 1$ et $x\sin\theta - y\cos\theta = 1$. Ces tangentes sont les tangentes parallèles à la droite (OO').



(b) Soit D une droite telle que $d(\mathsf{D},\Delta) = d(\mathsf{D},\Delta') = 1$. D'après la question 3.(a), la droite D est contenue dans un plan tangent à $\mathscr{C}$ et aussi dans un plan tangent à $\mathscr{C}'$.

1er cas. Si la droite D n'est pas parallèle aux droites Δ et Δ', $p(\mathsf{D})$ est une droite de Π tangente à Γ et à Γ' et est donc l'une des deux droites t_1 ou t_2. D est donc contenue dans le plan P_1 contenant t_1 et parallèle à Δ et Δ' ou dans le plan P_2 contenant t_2 et parallèle à Δ et Δ'. Réciproquement, si D est une droite de P_1 non parallèle à Δ et Δ', avec les notations de la question 2., on a $OH_1 = Oh_1' = 1$ et donc $d(\mathsf{D},\Delta) = d(\mathsf{D},\Delta') = 1$. De même, si D est dans P_2.

2ème cas. Si D est parallèle à Δ et Δ', D coupe Π en un point M tel que $OM = O'M = 1$. Le point M est donc nécessairement l'un des deux points d'intersection A ou B des cercles Γ et Γ'. Réciproquement, si D est la droite passant par A et parallèle à Δ et Δ', alors $d(\mathsf{D},\Delta) = OA = 1$ et $d(\mathsf{D},\Delta') = OB = 1$. De même, si D passe par B.

Les droites solutions sont donc :

- les deux droites parallèles à Δ et Δ' passant par les points d'intersection de Γ et Γ',
- les droites non parallèles à Δ et Δ' et contenues dans les plans contenant les tangentes communes à Δ et Δ' et parallèles à Δ et Δ'.

