

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Questions de cours et exemples.

- Un polynôme annulateur de f est un polynôme P tel que $P(f) = 0$.
- $(J_f, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et $(J_f, +, \times)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.
- Le polynôme minimal π_f de f est l'unique générateur unitaire de l'idéal principal J_f c'est-à-dire
 - π_f est non nul et unitaire;
 - $\pi_f(f) = 0$;
 - $\forall P \in \mathbb{K}[X], (P(f) = 0 \Rightarrow \pi_f | P)$.
- Le théorème de CAYLEY-HAMILTON affirme que $\chi_f(f) = 0$ et donc le polynôme caractéristique χ_f de f est élément de J_f ce qui montre que J_f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
 - On sait que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal et donc l'idéal non nul J_f est engendré par un certain polynôme unitaire ce qui montre l'existence de π_f .
- 5.1.**

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Mais alors, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = M.$$

5.2. Le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ est donc un polynôme annulateur de f . π_f est un diviseur unitaire de ce polynôme et donc l'un des trois polynômes X , $X - 1$ ou $X(X - 1)$. Mais on a $f \neq 0$ et $f - \text{Id} \neq 0$. Donc les polynômes X et $X - 1$ ne sont pas annulateurs de f . Finalement

$$\pi_f = X(X - 1).$$

6. 6.1. Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \text{ch } x$ (resp. $x \mapsto \frac{1}{2} \text{sh } x$) est une solution particulière sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = \text{ch } x$ (resp. $y'' + y = \text{sh } x$). Donc

Les solutions de l'équation $y'' + y = \text{ch } x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \text{ch } x + \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions de l'équation $y'' + y = \text{sh } x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \text{sh } x + \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6.2. Soient f une fonction de classe C^4 sur \mathbb{R} puis $g = f + f''$. g est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $g'' = f^{(4)} + f''$ puis $g'' - g = f^{(4)} - f$. Par suite,

$$f \text{ solution de } (H_1) \Leftrightarrow f^{(4)} - f = 0 \Leftrightarrow g'' - g = 0 \text{ (} H_2 \text{)}.$$

6.3. Les solutions de (H_2) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6.4. D'après la question 6.2., f est solution de (H_1) si et seulement si $g'' + g = 0$ si et seulement si $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \ln \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$.

Soient donc λ et μ deux réels. Une solution particulière de l'équation $y'' + y = \operatorname{ch} x$ (resp. $y'' + y = \operatorname{sh} x$) est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{ch} x$ (resp. $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sh} x$). D'après le principe de superposition des solutions, une solution particulière de l'équation $y'' + y = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x)$.

Ainsi, les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \frac{1}{2}(\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x)$, $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4$.
Maintenant, (λ, μ) décrit \mathbb{R}^2 si et seulement si $(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2})$ décrit \mathbb{R}^2 . En renommant les constantes $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\mu}{2}$, on a montré que

Les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma \operatorname{ch} x + \delta \operatorname{sh} x$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

6.5.

6.5.1. Puisque $E = \operatorname{Vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$, on a déjà $\dim(E) \leq 4$. Vérifions alors que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha \cos + \beta \sin + \gamma \operatorname{ch} + \delta \operatorname{sh} = 0$. Par unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on a déjà $\alpha \cos + \gamma \operatorname{ch} = \beta \sin + \delta \operatorname{sh} = 0$. Ensuite, si $\gamma \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\alpha \cos x + \gamma \operatorname{ch} x| = +\infty$ et en particulier, $\alpha \cos + \gamma \operatorname{ch} \neq 0$. Donc $\gamma = 0$ puis $\alpha = 0$ (car \cos n'est pas la fonction nulle). De même, si $\delta \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\beta \sin x + \delta \operatorname{sh} x| = +\infty$ et donc $\delta = 0$ puis $\beta = 0$.

On a montré que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre et donc que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de (E) . En particulier,

$$\dim(E) = 4.$$

6.5.2. La dérivation est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifions que sa restriction à E notée δ laisse stable E . D'après la question 6.4., E est l'ensemble des solutions de l'équation (H_1) .

Soit $f \in E$. Par suite, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et vérifie $f^{(4)} = f$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $f^{(5)} = f'$ ce qui s'écrit encore $(f')^{(4)} = f'$. Par suite, f' est solution de (H_1) ou encore $f' \in E$. On a montré que

δ est un endomorphisme de E .

6.5.3. Par définition, $\forall f \in E, f^{(4)} = f$ ou encore $\forall f \in E, (\delta^4 - \operatorname{Id}_E)(f) = 0$ ou enfin $\delta^4 - \operatorname{Id}_E = 0$. Ainsi, si $P = X^4 - 1$, P est un polynôme annulateur de f .

On a $P = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. π_δ est l'un des diviseurs unitaires de ce polynôme et donc

$$\pi_\delta \in \{X - 1, X + 1, X^2 + 1, (X - 1)(X + 1), (X - 1)(X^2 + 1), (X + 1)(X^2 + 1), X^4 - 1\}.$$

Maintenant,

- $(\delta - \operatorname{Id})(\cos) = -\sin - \cos \neq 0$ et donc $\delta - \operatorname{Id} \neq 0$.
- $(\delta + \operatorname{Id})(\cos) = -\sin + \cos \neq 0$ et donc $\delta + \operatorname{Id} \neq 0$.
- $(\delta^2 - \operatorname{Id})(\cos) = -2 \cos \neq 0$ et donc $\delta^2 - \operatorname{Id} \neq 0$.
- $(\delta^2 + \operatorname{Id})(\operatorname{ch}) = 2 \operatorname{ch} \neq 0$ et donc $\delta^2 + \operatorname{Id} \neq 0$.
- $(\delta - \operatorname{Id}) \circ (\delta^2 + \operatorname{Id})(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} - \operatorname{ch} + \operatorname{sh} - \operatorname{ch} = 2(\operatorname{sh} - \operatorname{ch}) \neq 0$ et donc $(\delta - \operatorname{Id}) \circ (\delta^2 + \operatorname{Id}) \neq 0$.
- $(\delta + \operatorname{Id}) \circ (\delta^2 + \operatorname{Id})(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} + \operatorname{ch} + \operatorname{sh} + \operatorname{ch} = 2(\operatorname{sh} + \operatorname{ch}) \neq 0$ et donc $(\delta + \operatorname{Id}) \circ (\delta^2 + \operatorname{Id}) \neq 0$.

Finalement,

$$\pi_\delta = X^4 - 1.$$

Problème.

Partie 1 : Quelques propriétés des endomorphismes u et v .

1. On sait que $\dim(E_n) = n + 1$ et que $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

2. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$u(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda u(P) + \mu u(Q),$$

et

$$v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) = \lambda v(P) + \mu v(Q).$$

Donc u et v sont des endomorphismes de E . De plus, si P est un polynôme de degré au plus n , alors P' et $P(X + 1)$ sont des polynômes de degré au plus n et donc

u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n .

3. $u_n(1) = 0$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_n(X^k) = kX^{k-1}$. Par suite,

$$u_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $v_n(X^k) = (X + 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j$ et donc

$$v_n = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $P \in E_n$. $u_n(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \in E_0$. Donc $\text{Ker}(u_n) = E_0$.

Ensuite, $\text{Im}(u_n) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), \dots, u(X^n)) = \text{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = E_{n-1}$.

$\det(u_n) = \det(U_n) = 1 \neq 0$ et donc $v_n \in \mathcal{GL}(E_n)$. On en déduit que $\text{Ker}(v_n) = \{0\}$ et $\text{Im}(v_n) = E_n$.

$\text{Ker}(u_n) = E_0$, $\text{Im}(u_n) = E_{n-1}$, $\text{Ker}(v_n) = \{0\}$ et $\text{Im}(v_n) = E_n$.

5. Soit $P \in E_n$. $u_n(v_n(P)) = (P(X + 1))' = P'(X + 1) = v_n(u_n(P))$ et donc

les endomorphismes u_n et v_n commutent.

6. $\chi_{u_n} = \chi_{v_n} = (-X)^{n+1}$. Par suite, $\text{Sp}(u_n) = (0, \dots, 0)$. Si l'endomorphisme u_n est diagonalisable, on dispose d'une base $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ de E_n telle que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u_n(P_i) = 0$. L'endomorphisme u_n s'annule alors sur une base de E et est donc nul. Ceci n'est pas et donc

$\chi_{u_n} = (-X)^{n+1}$. L'endomorphisme u_n n'est pas diagonalisable.

7. $\chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (1 - X)^{n+1}$. Si v_n est diagonalisable, l'endomorphisme v_n coïncide avec Id_{E_n} sur une base de E_n et est donc Id_{E_n} . Ceci n'est pas et donc

$\chi_{v_n} = (1 - X)^{n+1}$. L'endomorphisme v_n n'est pas diagonalisable.

8. 8.1. La famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de $n + 1$ polynômes éléments de E_n vérifiant $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(Q_k) = k$. On sait alors que

la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

8.2. $w_n(Q_0) = 1 - 1 = 0$. Ensuite, $w_n(Q_1) = (X + 1) - X = 1$. Soit alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= \frac{1}{k!} ((X + 1)X \dots (X - (k - 2)) - X(X - 1) \dots (X - (k - 2))(X - (k - 1))) \\ &= \frac{(X + 1) - (X - (k - 1))}{k!} X(X - 1) \dots (X - (k - 2)) = \frac{k}{k!} \times (k - 1)! Q_{k-1} \\ &= Q_{k-1}. \end{aligned}$$

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $w_n(Q_k) = Q_{k-1}$.

8.3. Par suite,

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

8.4. D'après la question 8.1., $\text{Im}(W_n) = \text{Vect}(w_n(Q_0), \dots, w_n(Q_n)) = \text{Vect}(0, Q_0, \dots, Q_{n-1}) = \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_{n-1}) = E_{n-1}$.

D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\text{Ker}(w_n)) = (n + 1) - n = 1$ et comme Q_0 est un élément non nul de $\text{Ker}(w_n)$, on a donc $\text{Ker}(w_n) = \text{Vect}(Q_0) = E_0$.

$\text{Ker}(w_n) = E_0$ et $\text{Im}(w_n) = E_n$.

8.5. On a $w_n(Q_0) = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $w_n(Q_k) = Q_{k-1}$. Par récurrence sur j , on en déduit que pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $0 \leq j \leq k$, on a $w_n^j(Q_k) = Q_{k-j}$ et si $j > k$, $w_n^j(Q_k) = 0$.

$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, n \rrbracket$, $w_n^j(Q_k) = \begin{cases} Q_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$.

9. Détermination des composantes d'un polynôme de E_n dans la base \mathcal{B} .

9.1. Soit $P \in E_n$.

D'après la question 8.1., la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n et donc il existe un $n + 1$ -uplet $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ et un seul tel que $P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$.

9.2. Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question 8.5., si $j \leq n$,

$$w_n^j(P)(0) = \left(\sum_{k=0}^n \beta_k w_n^j(Q_k) \right) (0) = \sum_{k=j}^n \beta_k Q_{k-j}(0).$$

Maintenant, si $k > j$, alors $k - j > 0$ et le polynôme Q_{k-j} est divisible par le polynôme X . Dans ce cas, $Q_{k-j}(0) = 0$ et si $k = j$, $Q_{k-j}(0) = Q_0(0) = 1$. Finalement, $w_n^j(P)(0) = \beta_j$.

Si $j > n$, tous les $w_n^j(Q_k)$ sont nuls et donc $w_n^j(P) = 0$. On en déduit que $w_n^j(P)(0) = 0$.

$$\forall j \in \mathbb{N}, w_n^j(P)(0) = \begin{cases} \beta_j & \text{si } j \leq n \\ 0 & \text{si } j > n \end{cases}.$$

9.3. Par suite,

$$\forall P \in E_n, P = \sum_{k=0}^n w_n^k(P)(0) Q_k.$$

9.4. Notons $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ la base duale de la base \mathcal{B} . La question 9.3. montre que

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \forall P \in E_n, Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0).$$

10. D'après les questions 9.3. et 8.5., $\forall P \in E_n, w_n^{n+1}(P) = 0$ et donc $w_n^{n+1} = \theta$. D'autre part, $w_n(Q_n) = Q_{n-n} = Q_0 = 1$.

$$w_n^{n+1} = \theta \text{ et } w_n^n(Q_n) = 1.$$

Partie 2 : Recherche de quelques polynômes minimaux.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, π_f divise χ_f .

2. Recherche de π_{u_n} .

2.1. Pour tout polynôme P de degré au plus n , on a $u_n^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ et donc

$$u_n^{n+1} = \theta.$$

2.2. $u_n(X^n) = (X^n)^{(n)} = n!$.

$$u_n(X^n) = n!.$$

2.3. π_{u_n} est un diviseur unitaire de $\chi_{u_n} = (-X)^{n+1}$ (d'après la question 6.). Donc, π_{u_n} est de la forme X^m avec $1 \leq m \leq n+1$. Mais d'après la question précédente, $u_n^n \neq \theta$ et donc, si $m \leq n$, le polynôme X^m n'est pas annulateur de u_n . On en déduit que

$$\pi_{u_n} = X^{n+1}.$$

2.4. D'après la question 10. de la partie 1, w_n est comme u_n nilpotent d'indice $n+1$ et donc

$$\pi_{w_n} = X^{n+1}.$$

3. Recherche de π_{v_n} .

3.1. D'après la question précédente, $(v_n - e_n)^{n+1} = w_n^{n+1} = \theta$. Le polynôme $(X-1)^{n+1}$ est donc annulateur de v_n . π_{v_n} est un diviseur unitaire de ce polynôme et donc de la forme $(X-1)^m$ avec $1 \leq m \leq n+1$.

3.2. Mais d'après la question 10. de la partie 1, $(v_n - e_n)^n(Q_n) = w_n^n(Q_n) = 1 \neq 0$ et donc $w_n^n \neq \theta$. Ainsi, si $m \leq n$, le polynôme $(X-1)^m$ n'est pas annulateur de v_n . Donc

$$\pi_{v_n} = (X-1)^{n+1}.$$

4. Polynômes annulateurs de u .

4.1. On sait que $a_m \neq 0$.

4.2 Pour $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a

$$u^j \left(\frac{X^m}{m!} \right) = \left(\frac{X^m}{m!} \right)^{(j)} = \frac{m!}{(m-j)!} \frac{X^{m-j}}{m!} = \frac{X^{m-j}}{(m-j)!},$$

et donc

$$r \left(\frac{X^m}{m!} \right) = \sum_{j=0}^m a_j u^j \left(\frac{X^m}{m!} \right) = \sum_{j=0}^m a_j \frac{X^{m-j}}{(m-j)!}.$$

$$r \left(\frac{X^m}{m!} \right) = \sum_{j=0}^m a_j \frac{X^{m-j}}{(m-j)!}.$$

4.3. Le coefficient constant du polynôme $r \left(\frac{X^m}{m!} \right)$ est a_m . Ce coefficient n'est pas nul et donc le polynôme $r \left(\frac{X^m}{m!} \right)$ n'est pas le polynôme nul. Mais alors, l'endomorphisme $r = P(u)$ n'est pas l'endomorphisme nul. Ainsi, si P est un polynôme non nul, on a $P(u) \neq \theta$ et on en déduit que

le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de u .

5. Polynômes annulateurs de v .

5.1. Soit P un polynôme non nul annulateur de v . P est annulateur de v et donc annulateur de chaque v_n , $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que P est un multiple de $\pi_{v_n} = (X-1)^{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ (d'après la question 3.).

5.2. En particulier, si P est un polynôme non nul annulateur de v , on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P) \geq n+1$. Ceci est absurde et il n'existe donc pas de polynôme non nul annulateur de v .

Le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de v .

6. 6.1. Soit $P \in E$. $s \circ s(P) = s(s(P)) = s(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P$ et donc

$$s^2 = \text{Id}_E.$$

6.2. Ainsi, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme non nul annulateur de s . On en déduit que s admet un polynôme minimal π_s et que π_s est l'un des trois polynômes $X-1$, $X+1$ ou X^2-1 . Comme s n'est ni Id_E (car $s(X) = 1-X \neq X$), ni $-\text{Id}_E$ (car $s(X) = 1-X \neq -X$), on a $\pi_s = X^2 - 1$ et donc

les polynômes annulateurs de s sont les polynômes de la forme $(X^2 - 1)Q$, $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Partie 3.

1. Puisque $u_n^{n+1} = \theta$, on a $\exp(u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{u_n^k}{k!}$.

Soit alors $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$(\exp(u_n))(X^m) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (X^m)^{(k)} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} X^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^{m-k} = (X+1)^m = v_n(X^m).$$

Ainsi, les endomorphismes v_n et $\exp(u_n)$ de E_n coïncident sur une base de E_n et donc

$$\exp(u_n) = v_n.$$

2. 2.1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le polynôme $u_n(Q_k)$ est un polynôme de degré au plus n et en appliquant la formule de la question 9.3.

$$\begin{aligned} u_n(Q_k) &= \sum_{j=0}^n w_n^j(u_n(Q_k))(0)Q_j \\ &= \sum_{j=0}^n u_n(w_n^j(Q_k))(0)Q_j \text{ (car } u_n \text{ et } w_n \text{ commutent d'après la question 5. de la partie 1)} \\ &= \sum_{j=0}^k u_n(Q_{k-j})(0)Q_j = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0)Q_{k-m}. \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0)Q_{k-m}.$$

2.2. Déjà, $u_n(Q_0) = 1' = 0$ et donc $u_n(Q_0)(0) = 0$. De même, $u_n(Q_1) = X' = 1$ et donc $u_n(Q_1)(0) = 1$. Soit alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $u_n(Q_m)(0) = Q'_m(0)$ est le coefficient de X dans le développement de $Q_m = \frac{1}{m!}X(X-1)\dots(X-(m-1))$. Ce coefficient vaut $\frac{1}{m!} \times (-1)^{m-1}(m-1)!$ ou encore $\frac{(-1)^{m+1}}{m}$ ce qui reste vrai quand $m = 1$.

$$\forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_m)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ \frac{(-1)^{m+1}}{m} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}.$$

2.3. Puisque $(v_n - e_n)^{n+1} = \theta_n$, la somme $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m$ existe et de plus

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} u_n(Q_k) &= \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0)Q_{k-m} = \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(Q_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(Q_k) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m \right) (Q_k). \end{aligned}$$

D'autre part, $u_n(Q_0) = 0 = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m \right) (Q_0)$.

Finalement, les endomorphismes u_n et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m$ de E_n coïncident sur une base de E_n et donc

$$u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m.$$