

Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice 1

Partie A Utilisation de méthodes algébriques.

1° a) Puisque M n'est pas inversible, $\text{Ker}M \neq \{0\}$ et il existe $X' \neq 0$ tel que $MX' = 0$. Mais alors, le vecteur $X = \frac{1}{\|X'\|_\infty} X'$ est un vecteur de $\text{Ker}M$ tel que $\|X\|_\infty = 1$.

b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 1$. Puisque $MX = 0$, on a en particulier $\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j$ et donc

$$|m_{i,i}| = |m_{i,i} x_i| = \left| - \sum_{j \neq i} m_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} m_{i,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i} |m_{i,j}| \right) |x_i| = \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|.$$

$$\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket / |m_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|.$$

2° On développe $\det(N - \lambda I_n)$ suivant sa dernière colonne et on obtient

$$\det(N - \lambda I_n) = (-a_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} (-a_{n+1-i}) \Delta_i = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_{n+1-i} \Delta_i),$$

où Δ_i est un déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & & \times & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & & & \times & 1 & \times & \dots & \times \\ & & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ \times & & \times & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad -\lambda \text{ étant écrit } i-1 \text{ fois. On a ainsi}$$

$\Delta_i = (-\lambda)^{i-1}$ et donc

$$\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i} \lambda^{i-1}) (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n) = (-1)^n P(\lambda).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \det(N - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda).$$

3° On a $P(z) = 0$ et donc la matrice $M = N - zI_n$ n'est pas inversible. D'après la question 1° b., il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|m_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$.

Si $i = 1$, on obtient $|-z| \leq |-a_n|$ et donc $|z| \leq |a_n| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Si $i = n$, on obtient $|-a_1 - z| \leq 1$ et donc $1 \leq |z| - |a_1|$ puis $|z| \leq 1 + |a_1| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Si $2 \leq i \leq n-1$, on obtient $|-z| \leq 1 + |-a_{n+1-i}|$ et donc $|z| \leq 1 + |a_{n+1-i}| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Dans tous les cas, on a $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

$$\text{Si } P(z) = 0 \text{ où } P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n, \text{ alors } |z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Partie B Utilisation de méthodes analytiques.

1° a) g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions croissantes sur $]0, +\infty[$, l'une d'elles étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (puisqu'un des a_i est non nul).

b) Puisque la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=] -\infty, 1[$ (car les a_i ne sont pas tous nuls). En particulier, il existe un réel strictement positif t_0 et un seul tel que $g(t_0) = 0$.

Maintenant, pour $t > 0$, on a $Q(t) = t^n g(t)$ et donc, pour $t > 0$, $Q(t) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0$.

il existe un réel strictement positif t_0 et un seul tel que $Q(t_0) = 0$.

2° Si z est nul, on a $|z| \leq t_0 \leq \alpha$. Sinon, on a $|z| > 0$.

Dans ce cas, l'égalité $P(z) = 0$ fournit $z^n = -a_1 z^{n-1} - \dots - a_{n-1} z - a_n$. On en déduit que $|z|^n \leq |a_1| |z|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| |z| + |a_n|$ puis $Q(|z|) \leq 0$ et enfin $g(|z|) \leq 0 = g(t_0)$. g étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient encore une fois $|z| \leq t_0 \leq \alpha$.

3° Posons $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ puis $\alpha = 1 + M$. On a $Q(\alpha) = (1 + M)^n - (|a_1|(1 + M)^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|(1 + M) + |a_n|)$.

Maintenant, puisque les a_i ne sont pas tous nuls, on a $\alpha = 1 + M > 1$ et donc

$$|a_1|(1 + M)^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|(1 + M) + |a_n| \leq M((1 + M)^{n-1} + \dots + (1 + M) + 1) = M \frac{(1 + M)^n - 1}{(1 + M) - 1} = (1 + M)^n - 1 < (1 + M)^n.$$

Ceci fournit $Q(\alpha) > 0$ ou encore $g(\alpha) > 0$. On en déduit que $|z| < \alpha$ ou encore

Si $P(z) = 0$ où $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$, alors $|z| < 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Exercice 2

Partie A.

1° Supposons $T \neq 0$.

φ est continue sur le segment $[0, |T|]$ et donc bornée sur ce segment. Mais alors φ est bornée sur \mathbb{R} par T -périodicité.

2° φ est T -périodique et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + T) = \varphi(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x + T) = \varphi'(x)$ ce qui montre que φ' est T -périodique.

3° Montrons que P_φ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + 0) = \varphi(x)$ et donc $0 \in P_\varphi$.
- Soit $(t, t') \in (P_\varphi)^2$. Pour tout réel x , on a

$$\varphi(x + t - t') = \varphi(x - t') = \varphi((x - t') + t') = \varphi(x),$$

et donc $t - t' \in P_\varphi$.

On a montré que

P_φ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie B Etude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

1° Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, G contient un réel x non nul. Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, G contient aussi $-x$. Mais alors l'un des deux réels x ou $-x$ est strictement positif et est élément de G . Ainsi,

$G \cap]0, +\infty[\neq \emptyset$.

2° $G \cap]0, +\infty[$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} et admet donc une borne inférieure. Donc a existe.

a) i) Supposons que $a \notin G$. Par définition de a , $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in G \cap]0, +\infty[/ a \leq x < a + \varepsilon$. Puisque $a \notin G$, on a plus précisément

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in G \cap]0, +\infty[/ a < x < a + \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = a > 0$, $\exists t_1 \in G$ tel que $a < t_1 < 2a$ puis pour $\varepsilon = t_1 - a > 0$, $\exists t_2 \in G$ tel que $a < t_2 < t_1 < 2a$. Mais alors, le réel $t_1 - t_2$ est dans G car G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et vérifie d'autre part $0 < t_1 - t_2 < a$. Ceci contredit la définition de a et il était donc absurde de supposer que $a \notin G$.

$$a \in G.$$

ii) Puisque $a \in G$, G contient encore $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$ et plus généralement par récurrence les na , $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi $0 = 0a$ et les opposés des na , $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, G contient les na , $n \in \mathbb{Z}$ et donc

$$a\mathbb{Z} \subset G.$$

Inversement, soient $x \in G$ puis $n = E\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Puisque $a\mathbb{Z} \subset G$, $na \in G$ puis $x - na \in G$. Mais

$$n = E\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow n \leq \frac{x}{a} < n + 1 \Rightarrow na \leq x < na + a \Rightarrow 0 \leq x - na < a.$$

Ainsi, $x - na \in G \cap]0, a[= \{0\}$ et donc $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a montré que $G \subset a\mathbb{Z}$ et finalement

$$\text{Si } \inf(G \cap]0, +\infty[) = a > 0, G = a\mathbb{Z}.$$

b) Supposons que $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$ et montrons que G est dense dans \mathbb{R} .

Pour cela, montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G / |x - g| < \varepsilon$.

Soient donc $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Puisque $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, $\exists y \in G$ tel que $0 < y < \varepsilon$. Soient $n = E\left(\frac{x}{y}\right) \in \mathbb{Z}$ puis $g = ny$. On a $g \in G$ et

$$n = E\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow n \leq \frac{x}{y} < n + 1 \Rightarrow ny \leq x < ny + y \Rightarrow 0 \leq x - g < y \Rightarrow 0 \leq x - g < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\text{Si } \inf(G \cap]0, +\infty[) = 0, G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.$$

Partie C Etude des solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples.

1° Si (E_f) admet une solution T -périodique y , d'après la question 2° de la partie A, y' puis y'' sont T -périodiques. On en déduit que $f = y'' - 2y' + 2y$ est T -périodique.

Par suite, si f n'est pas périodique, (E_f) n'admet pas de solution périodique.

2° L'équation caractéristique associée à (E_0) est $z^2 - 2z + 2 = 0$. Cette équation admet pour solution les nombres $1 + i$ et $1 - i$. On sait alors que les solutions sur \mathbb{R} de (E_0) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si une telle fonction y est périodique, cette fonction doit être bornée sur \mathbb{R} d'après la question 1° de la partie A. Ceci impose en particulier aux suites $(y(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(e^{2n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n \in \mathbb{N}} = \mu(e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ d'être bornées et donc impose $\lambda = \mu = 0$. Comme d'autre part, la fonction nulle admet n'importe quel réel pour période,

$$\text{la fonction nulle est la seule solution périodique de } (E_0),$$

3° Cherchons une solution particulière de (E_c) sous la forme $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) &= (-\lambda \cos x - \mu \sin x) - 2(-\lambda \sin x + \mu \cos x) + 2(\lambda \cos x + \mu \sin x) \\ &= (\lambda - 2\mu) \cos x + (2\lambda + \mu) \sin x. \end{aligned}$$

Puis

$$y \text{ solution de } (E_c) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{5} \\ \mu = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x).$$

Une solution particulière de (E_c) sur \mathbb{R} est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x)$. On sait alors que la solution générale de (E_c) sur \mathbb{R} est somme d'une solution particulière de (E_c) sur \mathbb{R} et de la solution générale de (E_0) sur \mathbb{R} .

Les solutions de (E_c) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Maintenant, si une telle solution est périodique, elle est bornée sur \mathbb{R} . Or, une telle solution est bornée sur \mathbb{R} si et seulement si la fonction $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ est bornée sur \mathbb{R} (car la fonction $x \mapsto \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x)$ est bornée sur \mathbb{R}) ce qui équivaut d'après la question précédente à $\lambda = \mu = 0$.

Réciproquement, la fonction $x \mapsto \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x)$ est 2π -périodique et donc

(E_c) admet une solution périodique et une seule à savoir la fonction $x \mapsto \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x)$.

Partie D

1° a)

i) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = y''(x + T) - 2y'(x + T) + 2y(x + T) = f(x + T) = f(x),$$

et donc

z est solution de (E_c) sur \mathbb{R} .

ii) Si y est T -périodique, alors $y = z$ et en particulier $y(0) = z(0) = y(T)$ et $y'(0) = z'(0) = y'(T)$.

Réciproquement, supposons que $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$ et posons $y_0 = y(0)$ et $y'_0 = y'(0)$. Puisque f est continue sur \mathbb{R} , le théorème de CAUCHY permet d'affirmer que y est la seule solution de (E_c) sur \mathbb{R} telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$. Comme z est solution de (E_c) sur \mathbb{R} et que $z(0) = y(T) = y(0) = y_0$ et $z'(0) = y'(T) = y'(0) = y'_0$, on a $y = z$ ce qui signifie que y est T -périodique.

y est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.

b) f est périodique et admet donc au moins une période non nulle que l'on note T .

On sait que les solutions de (E_f) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + f_0$ où f_0 est une solution particulière de (E_f) sur \mathbb{R} et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Maintenant,

$$\begin{cases} y(T) = y(0) \\ y'(T) = y'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^T(\lambda \cos T + \mu \sin T) + f_0(T) = \lambda + f_0(0) \\ e^T((\lambda + \mu) \cos T + (-\lambda + \mu) \sin T) + f'_0(T) = \lambda + \mu + f'_0(0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(e^T \cos T - 1) + \mu e^T \sin T = f_0(0) - f_0(T) \\ \lambda(e^T(\cos T - \sin T) - 1) + \mu(e^T(\cos T + \sin T) - 1) = f_0(0) - f'_0(T) \end{cases} \quad (S)$$

Le déterminant Δ de ce système est

$$\begin{vmatrix} e^T \cos T - 1 & e^T \sin T \\ e^T(\cos T - \sin T) - 1 & e^T(\cos T + \sin T) - 1 \end{vmatrix} = (e^T \cos T - 1)(e^T(\cos T + \sin T) - 1) - e^T \sin T(e^T(\cos T - \sin T) - 1) \\ = e^{2T} - 2e^T \cos T + 1 = (e^T - \cos T)^2 + 1 - \cos^2 T \\ = (e^T - \cos T)^2 + \sin^2 T.$$

Maintenant, si $\Delta = 0$ alors $\sin T = e^T - \cos T = 0$ puis $\sin T = 0$ et $e^T = \pm 1$ ce qui impose $e^T = 1$ et donc $T = 0$. Comme $T \neq 0$, on a donc $\Delta \neq 0$. On sait alors que le système (S) admet un et un seul couple solution (λ, μ) ou encore, d'après la question précédente, l'équation (E_f) admet une solution T -périodique et une seule et donc au moins une solution périodique.

(E_f) admet une solution périodique.

2° a) Supposons que P_f est dense dans \mathbb{R} .

i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque P_f est dense dans \mathbb{R} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists T_n \in P_f / |x - T_n| < \frac{1}{n}$. En particulier, la suite $x - T_n$ tend vers 0. Maintenant, chaque T_n étant une période de f , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x - T_n) = f(x)$ ou encore la suite $(f(x - T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Cette suite converge donc vers $f(x)$. Par continuité de f en 0, on a alors

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x - T_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - T_n)\right) = f(0).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$ et donc f est constante.

Si f est continue sur \mathbb{R} , périodique et si P_f est dense dans \mathbb{R} , alors f est constante.

ii) Supposons que f est une constante C . L'équation (E_f) admet alors la solution particulière $x \mapsto \frac{C}{2}$ et donc les solutions de (E_f) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{C}{2}$. De même qu'à la partie C, la seule solution de (E_f) bornée sur \mathbb{R} est la solution correspondant à $\lambda = \mu = 0$ à savoir la fonction $x \mapsto \frac{C}{2}$. Comme cette fonction est périodique, on a montré que

Si P_f est dense dans \mathbb{R} , (E_f) admet une solution périodique et une seule.

b) Supposons que $P_f = a\mathbb{Z}$ avec $a \in]0, +\infty[$.

(i) D'après la question 1° de la partie C., puisque (E_f) admet une solution T_1 -périodique, f est T_1 -périodique ou encore $T_1 \in P_f$. De même, $T_2 \in P_f$.

T_1 et T_2 sont des éléments de P_f .

ii) Choisissons une période strictement positive T_1 de y_1 et une période strictement positive T_2 de y_2 . T_1 et T_2 sont dans $P_f = a\mathbb{Z}$ et il existe donc deux entiers naturels non nuls k_1 et k_2 tels que $T_1 = k_1 a$ et $T_2 = k_2 a$. Soit $T = k_1 k_2 a$. Alors $T = k_2 T_1$ et donc T est une période de y_1 . De même $T = k_1 T_2$ et donc T est une période de y_2 . On a montré que

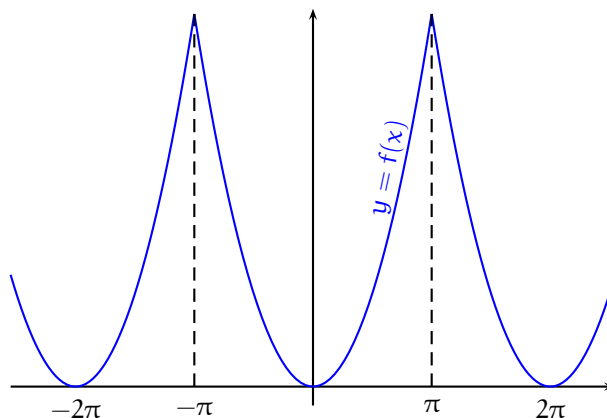
y_1 et y_2 possèdent une période commune.

iii) $y_2 - y_1$ est une solution T -périodique de (E_0) avec $T \neq 0$. D'après la question 2° de la partie C, on a $y_2 - y_1 = 0$ ou encore $y_1 = y_2$ ce qui montre de nouveau l'unicité d'une solution périodique de (E_f) .

Si $P_f = a\mathbb{Z}$, $a > 0$, (E_f) admet une solution périodique et une seule.

Partie E Détermination de la solution périodique de (E_f) dans un cas particulier.

1° Graphe de f



f est continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. f est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.

- $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$.

- Soit $n \geq 1$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x(-\sin(nx)) dx = \frac{4}{n\pi} \left[x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \frac{\pi(-1)^n}{n} = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, on sait que la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} et que cette convergence est normale.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

2° Soit $x \in \mathbb{R}$. Quand n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = O\left(\frac{n^2}{n^2 \times n^4}\right) = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. On en déduit que la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge. On a montré que

la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur \mathbb{R} .

Montrons que S est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

- Chaque u_n est de classe C^2 sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n'(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} (-n(2 - n^2) \sin(nx) - 2n^2 \cos(nx)) \text{ et } u_n''(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} (-n^2)((2 - n^2) \cos(nx) - 2n \sin(nx)).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{4(n(2 + n^2) + 2n^2)}{n^6} \leq \frac{4(5n^3)}{n^6} = \frac{20}{n^3},$$

et

$$|u_n''(x)| \leq \frac{4n^2((2 + n^2) + 2n)}{n^6} \leq \frac{4n^2(5n^2)}{n^6} = \frac{20}{n^2}.$$

Puisque les séries numériques de termes généraux $\frac{20}{n^3}$ et $\frac{20}{n^2}$ convergent, on en déduit que les séries de fonctions de termes généraux u_n' et u_n'' sont normalement et donc uniformément convergentes sur \mathbb{R} .

En résumé,

- la série de fonctions de terme général u_n , $n \geq 1$, converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $S - \frac{\pi^2}{6}$,
- chaque u_n , $n \geq 1$, est de classe C^2 sur \mathbb{R} ,
- les séries de fonctions de termes généraux u_n' et u_n'' convergent uniformément sur \mathbb{R} .

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, $S - \frac{\pi^2}{6}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et ses dérivées première et seconde s'obtiennent par dérivation terme à terme. Il en est de même de S .

S est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

3° Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S''(x) - 2S'(x) + 2S(x) &= (S''(x) + 2S(x)) - 2S'(x) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)} ((2-n^2)((2-n^2)\cos(nx) - 2n\sin(nx)) - 2(-n(2-n^2)\sin(nx) - 2n^2\cos(nx))) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)} (n^4+4)\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = f(x). \end{aligned}$$

Donc, S est une solution de (E_f) sur \mathbb{R} . De plus, S est 2π -périodique. D'après la partie précédente, on sait que

S est l'unique solution périodique de (E_f) .

4° Déterminons une solution particulière de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ de la forme $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = (2a) - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 2(b - 2a)x + 2(c - b + a).$$

Ensuite,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - b + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Une solution particulière de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ est $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$ et donc les solutions de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi, $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $S(x) = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$.

L'égalité $S(-\pi) = S(\pi)$ fournit $e^{-\pi}(-\lambda) + \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi + 1) = e^{\pi}(-\lambda) + \frac{1}{2}(\pi^2 + 2\pi + 1)$ puis $2\lambda \operatorname{sh} \pi = 2\pi$ et finalement $\lambda = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi}$.

L'égalité $S'(-\pi) = S'(\pi)$ fournit $e^{-\pi}(-(\lambda + \mu)) - \pi + 1 = e^{\pi}(-(\lambda + \mu)) + \pi + 1$ puis $2(\lambda + \mu) \operatorname{sh} \pi = 2\pi$ et finalement $\mu = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} - \lambda = 0$.

$$\forall x \in [-\pi, \pi], S(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} e^x \cos x + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2-n^2)}{n^2(n^4+4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} + \frac{1}{2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2-n^2)}{n^2(n^4+4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}.$$