Epreuve de Mathématiques A PSI

Questions de cours.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A.

2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E est isomorphe à $\text{Im}(f)$ et donc $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$.

3. Soient A et B deux matrices carrées de format $n \in \mathbb{N}^*$.
A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Deux matrices semblables ont en particulier même rang mais deux matrices ayant même rang ne sont pas nécessairement semblables.

4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). Un polynôme annulateur de f (resp. de A) est un polynôme P tel que $P(f) = 0$ (resp. $P(A) = 0$).

Problème.

Partie 1 : Quelques calculs préliminaires.

1. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & -3 & 3 \\ -3 & 3-X & -4 \\ -3 & 4 & -5-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2+2X+1) + 3(3X+3) - 3(3X+3) = -(X+1)^2(X-2).$$

$$\boxed{\chi_A = -(X+1)^2(X-2) \text{ et donc } \text{Sp}(A) = (-1,-1,2).}$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

• $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x + y \\ -3x + 4y - 4(-x + y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = y \end{array}\right.$. Donc

$$\boxed{\text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect}(e'_1) \text{ où } e'_1 = (0, 1, 1).}$$

• $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 2I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3y + 3z = 0 \\ -3x + y - 4z = 0 \\ -3x + 4y - 7z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = y \\ -3x - 3y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ z = -x \end{array}\right.$. Donc

$$\boxed{\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}(e'_3) \text{ où } e'_3 = (-1, 1, 1).}$$

2. $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ -9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Ker}((A + I_3)^2)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$. Ce plan ne contient pas le vecteur e'_3 car $-1 - 1 + 1 \neq 0$. Donc $\text{Ker}((A + I_3)^2) \cap \text{Ker}(A - 2I_3) = \{0\}$. Comme d'autre part $\dim(\text{Ker}((A + I_3)^2)) + \dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$, on a montré que

$$\boxed{\text{Ker}((A + I_3)^2) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3.}$$

3. Cherchons $e'_2 = (x, y, z)$ tel que $Ae'_2 = e'_1 - e'_2$ ou encore tel que $(A + I_3)e'_2 = e'_1$.

$$(A+I_3)e'_2 = e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-3y+3z=0 \\ -3x+4y-4z=1 \\ -3x+4y-4z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+y \\ -3x+4y-4(-x+y)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ z=-1+y \end{array}\right. ,$$

et on peut prendre $e'_2 = (1, 0, -1)$.

Puisque $(A+I_3)^2 e'_1 = (A+I_3)\times 0 = 0$, e'_1 est dans $\mathrm{Ker}((A+I_3)^2)$. Ainsi, e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathrm{Ker}((A+I_3)^2)$ et donc (e'_1, e'_2) est une base de ce plan. Mais alors, puisque $\mathrm{Ker}((A+I_3)^2)\oplus\mathrm{Ker}(A-2I_3) = \mathbb{C}^3$, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
Si on note f l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou encore

$$\boxed{A \text{ est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Partie 2 : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice $J(0)$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. On a donc $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0$. Par suite,

$$\mathrm{rg}(J(0)) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{rg}(e_2, \dots, e_n, 0) = \mathrm{rg}(e_2, \dots, e_n) = n-1.$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(J(0)) = n-1.}$$

2.

2.1. Pour $i \geq n+1$, posons $e_i = 0$. On a alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f^k(e_i) = e_{i+k}$. On en déduit en particulier que pour $k \geq n$, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f^k(e_i) = 0$ et donc $f^k = 0$. En écrivant les matrices correspondantes, on a montré que

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (J(0))^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow k+1 \text{ et } \forall k \geq n,\ (J(0))^k = 0.}$$

2.2. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(J(0)^k)^n = (J(0)^n)^k = 0^k = 0$ et toutes les puissances non nulles de $J(0)$ sont nilpotentes.

3.

$$\alpha(J(0)) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(J(0))^k}{k!} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J(0))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J(0))^k}{k!},$$

et donc

$$\boxed{\alpha(J(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 \end{pmatrix}.}$$

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $A^p = 0$ et $B^q = 0$. Puisque les matrices A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(\lambda A + \mu B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

Dans cette somme, si $k \geq p$, on a $A^k = 0$ et donc $\binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$. Si $k \leq p-1$ de sorte que $p+q-1-k \geq p+q-1-(p-1) = q$ et donc $B^{p+q-1-k} = 0$ puis $\binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$. Finalement tous les termes de la somme sont nuls et donc $(\lambda A + \mu B)^{p+q-1} = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.}}$$

5. Le résultat précédent se généralise par récurrence à une combinaison linéaire d'un nombre fini quelconque de matrices nilpotentes commutant deux à deux. Or, U est une combinason linéaire des matrices $J(0)$, $(J(0))^2$,..., $(J(0))^{n-1}$ qui sont toutes nilpotentes d'après 2.2. et commutent deux à deux. Donc U est nilpotente.

La dernière colonne de U est nulle et donc $\text{rg}(U) \leq n-1$. Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0$ $(*)$ où les C_i sont les colonnes de U.
L'équation $(*)$ s'écrit comme un système à $n-1$ équations et $n-1$ inconnues dont le déterminant est égal à 1 car la matrice correspondante est triangulaire inférieure à coeffcients diagonaux tous égaux à 1. Ce déterminant n'étant pas nul, le système admet l'unique solution $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.
Ainsi, les $n-1$ premières colonnes de U sont linéairement indépendantes et U est de rang au moins $n-1$. Finalement, U est de rang $n-1$.

$$\boxed{U \text{ est une matrice nilpotente de rang } n-1.}$$

Partie 3 : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(u^i) \Rightarrow u^i(x) = 0 \Rightarrow u^j(u^i(x)) = 0 \Rightarrow u^{i+j}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u^{i+j}).$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{Ker}(u^i) \subset \text{Ker}(u^{i+j}).}$$

2. D'après la question précédente, $\forall m \in \mathbb{N},\ \text{Ker}(u^m) \subset \text{Ker}(u^{m+1})$. On en déduit que la suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Si maintenant $\forall m \in \mathbb{N},\ t_{m+1} \neq t_m$ alors la suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels. On en déduit par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N},\ t_m \geq m$. En particulier, $t_{n+1} \geq n+1 > n$ ce qui est impossible puisque $\text{Ker}(u^{n+1})$ est un sous-espace de E qui est de dimension n.
Donc, $\exists m \in \mathbb{N}/\ t_{m+1} = t_m$. Mais alors $\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D'après une propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, $\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$ admet un plus petit élément. On en déduit l'existence de r.

3. (i) D'après la question précédente, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on a $t_m = t_{m+1}$ ou $t_m < t_{m+1}$.
Mais alors, par définition de r, $\forall m < r,\ t_m < t_{m+1}$. On en déduit que $\text{Ker}(u^m) \underset{\neq}{\subset} \text{Ker}(u^{m+1})$.

(ii) Par définition de r, $\text{Ker}(u^r) \subset \text{Ker}(u^{r+1})$ et $\dim(\text{Ker}(u^r)) \subset \dim(\text{Ker}(u^{r+1}))$. On en déduit que $\text{Ker}(u^r) = \text{Ker}(u^{r+1})$.
(iii) Montrons par récurrence que $\forall m \geq r,\ \text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$.
• C'est vrai pour $m = r$.
• Soit $m \geq r$. Supposons que $\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$ et montrons que $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$.
On a déjà $\text{Ker}(u^{m+1}) \subset \text{Ker}(u^{m+2})$. Inversement pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(u^{m+2}) &\Rightarrow u^{m+2}(x) = 0 \Rightarrow u^{m+1}(u(x)) = 0 \Rightarrow u(x) \in \text{Ker}(u^{m+1}) \\ &\Rightarrow u(x) \in \text{Ker}(u^m) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &\Rightarrow u^m(u(x)) = 0 \Rightarrow u^{m+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u^{m+1}), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$ et finalement que $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$.

On a montré par récurrence que $\forall m \geq r,\ \text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$.

Partie 4 : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
1.1. $\text{Im}(w) = \{v^q(y),\ y \in \text{Im}(v^p)\} = \{v^q(v^p(x)),\ x \in E\} = \{v^{p+q}(x),\ x \in E\} = \text{Im}(v^{p+q})$.

$$\boxed{\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q}).}$$

1.2. $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(v^q) \cap \text{Im}(v^p) \subset \text{Ker}(v^q)$.

$$\boxed{\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(v^q).}$$

1.3. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(w)) + \dim(\text{Im}(w)) = \dim(\text{Im}(v^p))$. Puisque $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(v^q)$ et que $\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q})$, on en déduit que $\dim(\text{Im}(v^p)) \leq \dim(\text{Ker}(v^q)) + \dim(\text{Im}(v^{p+q}))$ ou encore $n - \dim(\text{Ker}(v^p)) \leq \dim(\text{Ker}(v^q)) + n - \dim(\text{Ker}(v^{p+q}))$ ou enfin $\dim(\text{Ker}(v^{p+q})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + \dim(\text{Ker}(v^q))$.

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(v^{p+q})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + \dim(\text{Ker}(v^q)).}$$

1.4. v est de rang $n - 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(v)) = 1$.
La question précédente fournit alors en particulier

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \dim(\text{Ker}(v^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(v^i)) + \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(v^i)) + 1.$$

Par récurrence sur i, on en déduit alors

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim(\text{Ker}(v^i)) \leq i.}$$

1.5 Si maintenant il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dim(\text{Ker}(v^{i_0})) < i$ alors, puisque $\text{Ker}(v^n) = E$,

$$n = \dim(\text{Ker}(v^n)) = \dim(\text{Ker}(v^{(n-i_0)+i_0})) \leq \dim(\text{Ker}(v^{n-i_0})) + \dim(\text{Ker}(v^{i_0})) < (n - i_0) + i_0 = n,$$

ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim(\text{Ker}(v^i)) = i.}$$

2. En particulier, $\dim(\text{Ker}(v^{n-1})) = n - 1 < n$ et donc $\text{Ker}(v^{n-1}) \neq E$ ou encore

$$\boxed{v^{n-1} \neq \theta.}$$

3. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que la famille $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Supposons par l'absurde que cette famille soit liée et donc qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v^i(e) = 0$. Soit $p = \text{Min}\{i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. On a

$$\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i v^i(e)=0 \Rightarrow \sum_{i=p}^{n-1}\lambda_i v^i(e)=0 \Rightarrow v^{n-1-p}\left(\sum_{i=p}^{n-1}\lambda_i v^i(e)\right)=0 \Rightarrow \lambda_p v^{n-1}(e)=0.$$

Cette dernière égalité est absurde car $\lambda_p \neq 0$ et $v^{n-1}(e)\neq 0$ et on a montré que la famille $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Enfin, puisque $\mathrm{card}(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e)) = n = \dim(E)$, on a montré que la famille $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est une base de E.

$$\boxed{\text{Il existe } e \in E \text{ tel que la famille } (e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e)) \text{ soit une base de } E.}$$

4. Puisque $v^n(e) = 0$, on a immédiatement

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(v^i(e))_{0\leq i\leq n-1}}(v) = J(0).}$$

5. D'après la question précédente, si v est un endomorphisme nilpotent de rang $n-1$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de v est $J(0)$. Réciproquement, comme $J(0)$ est une matrice nilpotente de rang $n-1$ d'après la partie 2, un endomorphisme de matrice $J(0)$ dans une certaine base est nilpotent de rang $n-1$.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes nilpotents de rang } n-1 \text{ sont les endomorphismes de matrice } J(0) \text{ dans une certaine base.}}$$

Ainsi, deux matrices nilpotentes de rang $n-1$ sont semblables à la matrice $J(0)$ et donc

$$\boxed{\text{deux matrices nilpotentes de rang } n-1 \text{ sont semblables.}}$$

Partie 5 : Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{M^k}{k!}\right)P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P^{-1}\frac{M^k}{k!}P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{(P^{-1}MP)^k}{k!}$.

Maintenant, l'application $f\ :\ M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$. Puisque $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie, on en déduit que f est continue sur $M_n(\mathbb{C})$ et donc, pour $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}P^{-1}\alpha(M)P = f(\alpha(M)) &= f\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{M^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{M^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty} P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{M^k}{k!}\right)P \\ &= \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{(P^{-1}MP)^k}{k!} = \alpha(P^{-1}MP).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{C}),\ P^{-1}\alpha(M)P = \alpha(P^{-1}MP).}$$

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = x + iy$.

$$e^z = i \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 1 \times e^{i\pi/2} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ et } y \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } e^z = i \text{ est } i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right).}$$

$$e^z = -1 \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 1 \times e^{i\pi} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ et } y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } e^z = -1 \text{ est } i(\pi + 2\pi\mathbb{Z}).}$$

Le module de $-3-4i$ est 5 et un argument de $-3-4i$ est $\theta = \pi + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{4}{3}$. Par suite

$$e^z = -3-4i \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 5 \times e^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = 5 \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \ln 5 \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } e^z = -3-4i \text{ est } \{\ln 5 + i\theta + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ où } \theta = \pi + \operatorname{Arctan}\frac{4}{3}.}$$

3. Soit $\mu \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$ et donc si $\mu = 0$, l'équation $e^z = \mu$ n'a pas de solution.
Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. Posons $\mu = re^{i\theta}$ où $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \mu \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = r \times e^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = r \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \ln r \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \forall \mu \in \mathbb{C}^*,\ e^z = \mu \Leftrightarrow z = \ln|\mu| + i\arg(\mu) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z},}$$

où $\arg(\mu)$ désigne un argument de μ.

4.

4.1 $\alpha(sI_n) = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{(sI_n)^k}{k!} = \left(\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{s^k}{k!}\right) I_n = e^s I_n = \mu I_n.$

$$\boxed{\alpha(sI_n) = \mu I_n.}$$

4.2. Puisque les matrices sI_n et $J(0)$ commutent, $\alpha(J(s)) = \alpha(sI_n) \times \alpha(J(0)) = \mu\alpha(J(0))$.

$$\boxed{\alpha(J(s)) = \mu\alpha(J(0)).}$$

4.3. Puisque $\mu \neq 0$, $\mu[\alpha(J(0)) - I_n] = \mu U$ est nilpotente de rang $n-1$ d'après la question 5. de la partie 2.

4.4. La matrice $\mu[\alpha(J(0)) - I_n] = \alpha(J(s)) - \mu I_n$ est nilpotente de rang $n-1$. D'autre part, la matrice $J(\mu) - \mu I_n = J(0)$ est nilpotente de rang $n-1$. D'après la question 5. de la partie 4, ces deux matrices sont semblables. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}(\alpha(J(s)) - \mu I_n)Q = J(\mu) - \mu I_n$ ou encore telle que $Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu)$.

$$\boxed{\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) /\ Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu).}$$

5. D'après la question 1., $J(\mu) = Q^{-1}\alpha(J(s))Q = \alpha(Q^{-1}J(s)Q)$ et une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$ dans $M_n(\mathbb{C})$ est $X = Q^{-1}J(s)Q$.

6. Comme à la question 1., l'application $M \mapsto {}^tM$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme de cet espace. Donc, pour $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$${}^t\alpha(M) = {}^t\left(\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{{}^tM^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{({}^tM)^k}{k!}\right) = \alpha({}^tM).$$

Par suite, ${}^tJ(\mu) = \alpha({}^t(Q^{-1}J(s)Q))$ et une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$ est ${}^t(Q^{-1}J(s)Q)$.

7. <u>Applications</u>

7.1. $T = {}^t(J(i))$. D'après la question 2., le complexe $s = i\dfrac{\pi}{2}$ est tel que $e^s = \mu$ où $\mu = i$. On peut donc choisir $X_1 = {}^t\left(Q^{-1}J\left(i\dfrac{\pi}{2}\right)Q\right)$ où Q est une matrice inversible telle que $Q^{-1}\left(\alpha\left(J\left(i\dfrac{\pi}{2}\right)\right) - iI_2\right)Q = J(0)$.

On a $\alpha\left(J\left(i\dfrac{\pi}{2}\right)\right) - iI_2 = i(\alpha(J(0)) - I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = V$. Comme nous l'avons étudié dans la partie 4., si on prend $e'_1 = e = e_1$ et $e'_2 = v(e) = ie_2$, la matrice de v dans la base (e'_1, e'_2) est $J(0)$ ou encore, on peut prendre $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ et donc $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{i} \end{pmatrix}$ puis

$${}^tX_1 = Q^{-1}J\left(i\frac{\pi}{2}\right)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi}{2} & 0 \\ 1 & \dfrac{i\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{i} & \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{i} & \dfrac{i\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $X_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi}{2} & \dfrac{1}{i} \\ 0 & \dfrac{i\pi}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice telle que $\alpha(X_1) = T$.

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{i\pi}{2} & \dfrac{1}{i} \\ 0 & \dfrac{i\pi}{2} \end{pmatrix}.}$$

7.2.

7.2.1. On reproduit le travail précédent en remplaçant $\mu = i$ par $\mu = -1$ et $s = i\dfrac{\pi}{2}$ par $s = i\pi$.

$$^t B_1 = Q^{-1} J(i) Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 1 & i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 1 & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ -1 & i\pi \end{pmatrix},$$

et on peut prendre $B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$.

$$\boxed{B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}.}$$

7.2.2. Un calcul par blocs montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & \ln^k 2 \end{pmatrix}$ et donc $\alpha(H) = \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & \alpha(\ln 2 I_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\alpha(H) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

7.2.3. On a vu dans la partie 1. que $A = Q \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\alpha(H)Q^{-1} = \alpha(QHQ^{-1})$ où $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons alors Q^{-1}.

$$\left\{\begin{array}{l} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = -e_3 + e'_1 \\ e_1 = e_3 + e'_2 \\ e'_3 = -(e_3 + e'_2) + (-e_3 + e'_1) + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ e_2 = e'_2 + e'_3 \\ e_1 = e'_1 - e'_3 \end{array}\right.$$

et donc $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis

$$X_2 = QHQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\ln 2 \\ -1 & 1 & \ln 2 \\ -1 & 2 & \ln 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ln 2 & -1-\ln 2 & 1+\ln 2 \\ -1-\ln 2 & 1+\ln 2 & -2-\ln 2 \\ -1-\ln 2 & 2+\ln 2 & -3-\ln 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} \ln 2 & -1-\ln 2 & 1+\ln 2 \\ -1-\ln 2 & 1+\ln 2 & -2-\ln 2 \\ -1-\ln 2 & 2+\ln 2 & -3-\ln 2 \end{pmatrix}.}$$

