Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

EXERCICE 1

1) a) Soit $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$. On sait que les valeurs propres de u sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur de u. P est annulateur de u et les racines de P sont 0 et 1 et donc

$$\boxed{\text{si le réel } \lambda \text{ est valeur propre de } u\text{, alors } \lambda \in \{0,1\}.}$$

b) Les valeurs propres de U sont les valeurs propres de u et sont donc éléments de $\{0,1\}$. Le polynôme caractéristique de U est donc l'un des quatre polynômes

$$-X^3 \text{ ou } -X^2(X-1) \text{ ou } -X(X-1)^2 \text{ ou } -(X-1)^3.$$

c) P_u est l'un des quatre polynômes $-X^3$ ou $-X^2(X-1)$ ou $-X(X-1)^2$ ou $-(X-1)^3$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^k par A s'écrit

$$X^k = X(X-1)^2 \times Q_k + a_k X^2 + b_k X + c_k, \ (*)$$

où Q_k est un polynôme et a_k, b_k et c_k sont des réels. En évaluant en 0 on obtient déjà $c_k = 0$ puis en évaluant en 1, on obtient $a_k + b_k = 1$. On dérive alors les deux membres de l'égalité $(*)$ et on évalue en 1. On obtient $k \times 1^{k-1} = 0 + 2a_k + b_k$. Ainsi, on a $2a_k + b_k = k$ et $a_k + b_k = 1$ puis $a_k = k-1$ (en retranchant membre à membre) et $b_k = 1 - a_k = 2 - k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists Q_k \in \mathbb{R}[X]/\ X^k = X(X-1)^2 Q_k + (k-1)X^2 + (2-k)X.}$$

Puisque le polynôme $X(X-1)^2$ est annulateur de u, en évaluant en u, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u^k = (k-1)u^2 + (2-k)u.}$$

2) a) Puisque u est diagonalisable, il existe une base (e'_1, e'_2, e'_3) telle que pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$ avec $\lambda_i \in \{0,1\}$. Pour $i \in \{1,2,3\}$, comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on a $\lambda_i^2 = \lambda_i$ et donc

$$u^2(e'_i) = \lambda_i^2 e'_i = \lambda_i e'_i = u(e'_i).$$

Ainsi, les endomorphismes u et u^2 coïncident sur une base de E et sont donc égaux. Finalement, u est un projecteur. On sait alors que $v = id_E - u$ est le projecteur associé et que dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$ et donc que $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = E$.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ est diagonalisable, } u \text{ et } v \text{ sont des projecteurs associés et } \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = E.}$$

b) U est alors semblable à l'une des quatre matrices

$$\boxed{D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3) a) $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 = X(X-2) + 1$ s'écrit encore $(X-1)^2 + X(2-X) = 1$.

$$\boxed{(X-1)^2 + XB = 1 \text{ où } B = 2 - X.}$$

b) En évaluant en u, on obtient

$$\boxed{(u - \mathrm{id}_E)^2 + (2\mathrm{id}_E - u) \circ u = \mathrm{id}_E.}$$

c) L'égalité $u^3 - 2u^2 + u = 0$ s'écrit encore $u \circ (\mathrm{id}_E - u)^2 = (\mathrm{id}_E - u)^2 \circ u = 0$ et donc

$$u \circ v^2 = 0 \text{ et } v^2 \circ u = 0.$$

On en déduit déjà que $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$.

Montrons alors que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(v^2)$. L'égalité de la question b) s'écrit encore $\mathrm{id}_E = v^2 + (2\mathrm{id}_E - u)$ $(**)$. Si maintenant x est un élément de $\mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0$ et en évaluant l'égalité $(**)$ en x, on obtient

$$x = v^2(x) + 0 = v^2(x),$$

ce qui montre que x est dans $\mathrm{Im}(v^2)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(v^2)$ et finalement $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v^2)$. Mais alors

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(v^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(v^2)),$$

et comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$, on a finalement $\mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Im}(u)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Im}(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v^2).}$$

d) Montrons que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right)$. On a donc $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$ et $u(x) = 0$. Mais alors

$$x = 2u(x) - u(u(x)) = 0,$$

et donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right) = \{0\}$. D'autre part, d'après la question c) et le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(v^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E).$$

En résumé, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right) = \{0\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right)) = \dim(E)$ et on a donc montré que

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{Ker}\left((u - \mathrm{id}_E)^2\right).}$$

4) a) et b) D'après la question 3)d), on a $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v^2)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$, on a

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(v^2)) = 2.}$$

Soit $x \in E$. Si $x \in \mathrm{Ker}(v)$, alors $v(x) = 0$ puis $v(v(x)) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(v^2)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2).}$$

Mais alors, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v^2) = \{0\}$ et la somme $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$ est directe. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)) = 1 + 1 = 2$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)) = 2.}$$

c) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$. Par suite, puisque $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$, (e_1) est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et

$$u(e_1) = 0.$$

Soient ensuite e_3 un vecteur de $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{id}_E)^2)$ non dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ puis $e_2 = (u - \mathrm{id}_E)(e_3)$. Comme $(u - \mathrm{id}_E)(e_2) = (u - \mathrm{id}_E)^2(e_3) = 0$, e_2 est un élément de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et vérifie donc

$$u(e_2) = e_2.$$

De plus, $e_2 \neq 0$ car $e_3 \notin \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. D'autre part, puisque $e_2 = (u - \text{id}_E)(e_3)$, on a encore

$$u(e_3) = e_2 + e_3.$$

Vérifions que (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$. Déjà e_2 est élément de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et donc de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$ d'après la question précédente. e_2 et e_3 sont donc deux vecteurs de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$. Ensuite, $\text{card}((e_2, e_3)) = 2 = \dim(\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2))$ et pour vérifier que (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$, il suffit de vérifier que cette famille est libre.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda e_2 + \mu e_3 = 0 &\Rightarrow (u - \text{id}_E)(\lambda e_2 + \mu e_3) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda.0 + \mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu = 0 \text{ (car } e_2 \neq 0).\end{aligned}$$

L'égalité $\lambda e_2 + \mu e_3 = 0$ s'écrit alors $\lambda e_2 = 0$ et impose $\lambda = 0$ puisque $e_2 \neq 0$. Ainsi, la famille (e_2, e_3) est libre et est donc une base de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Puisque (e_1) est une base de $\text{Ker}(u)$, (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$ et que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$, $\mathscr{B}$ est une base de E et par construction

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) a) Premier exemple. Calculons tout d'abord $U^3 - 2U^2 + U = U(U - I_3)^2$.

$$U(U - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant

$$\chi_U = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - 1 + 1) - (X - 1 + 1) + (-1 + 1 + X) = -X^2(X-1).$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de U, on note que $C_1 \neq 0$ et que C_2 et C_3 sont colinéaires à C_1. Par suite, $\text{rg}(U) = 1$. Mais alors $\dim(\text{Ker}(U)) = 3 - \text{rg}(U) = 2$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. U est donc diagonalisable. D'après la question 2), U est semblable à l'une des quatre matrices D_0, D_1, D_2, D_3 et plus précisément ici, puisque $\text{rg}(U) = 1$,

$$\boxed{U \text{ est semblable à la matrice } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) Calculons $U^3 - 2U^2 + U = U(U - I_3)^2$.

$$\begin{aligned}U(U - I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\chi_U = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 1-X & -X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 2X + 1) = -X(X-1)^2.$$

Maintenant en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $U-I_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires donc $\text{rg}(U-I_3)\geq 2$ et C_2 et C_3 sont colinéaires et donc $\text{rg}(U-I_3)=2$. Mais alors, $\dim(\text{Ker}(U-I_3))=1$ et on est dans la situation de la question 4). Dans ce cas,

$$\boxed{U \text{ est semblable à la matrice } T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

EXERCICE 2

1) a) Soient $t\in\mathbb{R}$ et $M(x,y)$ un point du plan.

$$M\in D_t\cap\Gamma\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=tx\\x^3+y^3-3xy=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=tx\\x^3+t^3x^3-3tx^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=tx\\x^2((1+t^3)x-3t)=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x=y=0 \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=tx\\(1+t^3)x=3t\end{array}\right..$$

• **1 er cas.** Si $t=-1$, l'équation $(1+t^3)x=3t$ n'a pas de solution. Ainsi,

$$\boxed{D_{-1}\cap\Gamma=\{(0,0)\}.}$$

• **2 ème cas.** Si $t\neq-1$, $1+t^3\neq0$ et donc

$$M\in D_t\cap\Gamma\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{array}\right...$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ D_t\cap\Gamma=\{(0,0),\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right)\}.}$$

On note enfin que si $t=0$, les deux points précédents sont confondus.

b) Le plan est la réunion des droites D_t, $t\in\mathbb{R}$ et de l'axe (Oy).
Il reste à étudier l'intersection de Γ avec l'axe (Oy). Mais $\left\{\begin{array}{l}x=0\\x^3+y^3-3xy=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\y^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0$ ce qui montre que $\Gamma\cap(Oy)=\{(0,0)\}$. Ce dernier résultat et le résultat de la question a) permet d'affirmer que $\Gamma=\{\varphi(t),\ t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}\cup\{(0,0)\}=\Phi\cup\{(0,0)\}$. Comme d'autre part, $\varphi(0)=(0,0)$, $\Phi\cup\{(0,0)\}=\Phi$ et on a montré que

$$\boxed{\Gamma=\Phi.}$$

c) • **Symétries.** Soit $t\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$. Alors $\dfrac{1}{t}\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$ et

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{3/t}{1+1/t^3},\frac{3/t^2}{1+1/t^3}\right)=\left(\frac{3t^2}{1+t^3},\frac{3t}{1+t^3}\right)=(\beta(t),\alpha(t))=s_\Delta(\varphi(t)),$$

où Δ est la droite d'équation $y=x$. Maintenant, quand t décrit $]0,1]$, $\dfrac{1}{t}$ décrit $[1,+\infty[$ et la portion de Φ correspondant à $t\in[1,+\infty[$ est la symétrique par rapport à Δ de la portion de Φ correspondant à $t\in]0,1]$. De même, la portion de Φ correspondant à $t\in]-\infty,-1[$ est la symétrique par rapport à Δ de la portion de Φ correspondant à $t\in]-1,0[$. Puisque d'autre part, $\varphi(0)=(0,0)$ est son propre symétrique, il suffit d'étudier et de construire Φ sur $]-1,1]$, la courbe complète étant ensuite obtenue par réflexion d'axe Δ.

• **Variations conjointes de α et β sur $]-1,1]$.**
Les fonctions α et β sont dérivables sur $]-1,1]$ et pour $t\in]-1,1]$,

$$\alpha'(t) = \frac{3((1+t^3) - t(3t^2))}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ et } \beta'(t) = \frac{3(2t(1+t^3) - t^2(3t^2))}{(1+t^3)^2} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Pour $t \in]-1,1]$, $(1+t^3)^2 > 0$ et $1 - 2t^3$ est du signe de $-\left(t - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Donc $\alpha'(t)$ est du signe de $t - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. De même, $2 - t^3 > 0$ et $\beta'(t)$ est du signe de t. On en déduit le tableau des variations conjointes des fonctions α et β sur l'intervalle $]-1,1]$.

t	-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		1
α'	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
α	$\Vert$ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}$	↘	$\frac{3}{2}$
β	$\Vert$ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	↗	$\frac{3}{2}$
β'	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	

• **Etude quand t tend vers -1 par valeurs supérieures.** On a déjà $\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \alpha(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \beta(t) = +\infty$. De plus, puisque pour $t \in]-1,1]$, on a $\beta(t) = t\alpha(t)$, on a

$$\lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} t = -1.$$

Ensuite, pour $t \in]-1,1]$,

$$\beta(t) - (-\alpha(t)) = \frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{3t}{t^2-t+1}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} (\beta(t) + \alpha(t)) = \frac{-3}{3} = -1$ et donc que la droite D d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à Γ quand t tend vers -1 par valeurs supérieures. Enfin, pour $t \in]-1,1]$,

$$\beta(t) - (-\alpha(t) - 1) = \frac{3t}{t^2-t+1} + 1 = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} = \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} > 0.$$

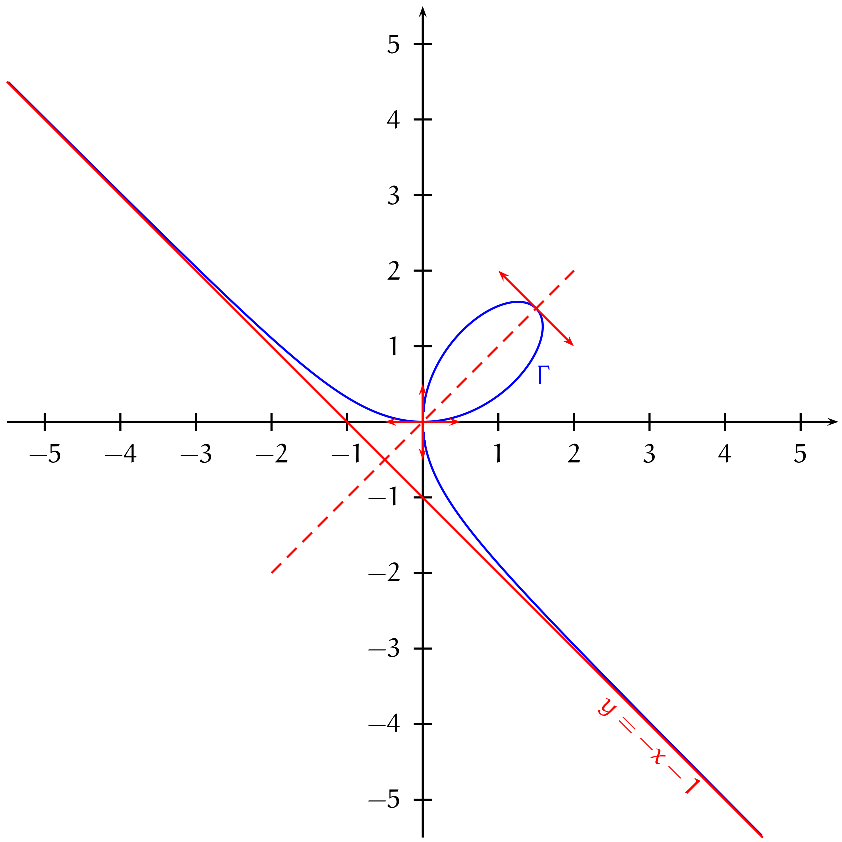
Ainsi, la portion de Γ obtenue quand t décrit $]-1,1]$ est strictement au-dessus de D.

• **Etude pour $t = 0$.** On a $\overrightarrow{\frac{d\varphi}{dt}}(0) = (3,0)$ et la tangente au point $\varphi(0) = (0,0)$ est dirigée par le vecteur e_1.

• **Etude pour $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.** On a $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. De plus, $\alpha'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$ et $\beta'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \neq 0$. Donc la tangente en $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ est dirigée par e_2.

• **Etude pour $t = 1$.** On a $\varphi(1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ puis $\varphi'(1) = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. La tangente au point $\varphi(1)$ a donc un coefficient directeur égal à -1.

d) Tracé de Γ.



e) Soit M un point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont notées (x, y) et un couple de coordonnées polaires est noté $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned}M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3xy = 0\\&\Leftrightarrow r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta - 3r^2\sin\theta\cos\theta = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3\sin\theta\cos\theta = 0\\&\Leftrightarrow r = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \text{ (car } \theta = 0 \text{ par exemple refournit } r = 0)\end{aligned}$$

On note alors que la fonction r est 2π-périodique puis que pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos^3\theta + \sin^3\theta = 0 &\Leftrightarrow (\cos\theta)^3 = (-\sin\theta)^3 \Leftrightarrow \cos\theta = -\sin\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\&\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une représentation polaire de } \Gamma \text{ est } r = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta},\ \theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}.}$$

f) On a déjà vu que Γ était symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) a) Γ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de S tels que $z = 0$ ou encore

$$\boxed{\Gamma = S \cap (Oxy).}$$

b) Travaillons plutôt en dimension 2 dans le plan (xOy).
Soit $M(x,y)$ un point du plan (xOy). Un vecteur normal à la droite Δ est le vecteur $\overrightarrow{n} = (1,-1)$. Le projeté orthogonal de M sur Δ est de la forme $M + \lambda\overrightarrow{n} = (x+\lambda, y-\lambda)$. De plus

$$(x+\lambda, y-\lambda) \in \Delta \Leftrightarrow x+\lambda = y-\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{y-x}{2}.$$

Dans ce cas, $(x+\lambda, y-\lambda) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$.

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } M = (x,y,0) \text{ sur } \Delta \text{ est le point } p_\Delta(M) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}, 0\right).}$$

Par suite, en posant $\lambda = \dfrac{x+y}{2}$,

$$d(M,\Delta) = Mp_\Delta(M) = \|(x+\lambda, y-\lambda, 0) - (x,y,0)\| = |\lambda| \times \|(1,-1,0)\| = \frac{|x+y|}{2} \times \sqrt{2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\text{Si } M = (x,y,0),\ d(M,\Delta) = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}.}$$

c) Le projeté orthogonal de M sur Δ est $p_\Delta(M) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}, 0\right)$ et le projeté orthogonal de N sur Δ, qui est encore le projeté orthogonal de $(X,Y,0)$ sur Δ, est $p_\Delta(N) = \left(\dfrac{X+Y}{2}, \dfrac{X+Y}{2}, 0\right)$. Par suite

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} P_\Delta(M) = p_\Delta(N) \\ OM = ON \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = X+Y \\ x^2+y^2 = X^2+Y^2+Z^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = X+Y \\ (x+y)^2 - 2xy = X^2+Y^2+Z^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = X+Y \\ xy = \dfrac{1}{2}((X+Y)^2 - (X^2+Y^2+Z^2)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = X+Y \\ xy = \dfrac{1}{2}(2XY - Z^2) \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Maintenant, $x^3+y^3-3xy = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y+1)$ et donc

$$\begin{aligned}
N \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M \in \Gamma / \left\{\begin{array}{l} p_\Delta(N) = p_\Delta(M) \\ ON = OM \end{array}\right. &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x^3+y^3-3xy = 0 \\ X+Y = x+y \\ X^2+Y^2+Z^2 = x^2+y^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x+y = X+Y \\ xy = \dfrac{1}{2}(2XY - Z^2) \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y+1) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} (X+Y)^3 - \dfrac{3}{2}(2XY - Z^2)(X+Y+1) = 0 \\ x+y = X+Y \\ xy = \dfrac{1}{2}(2XY - Z^2) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(X+Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X+Y+1) = 0 \\ \text{L'équation } \alpha^2 - (X+Y)\alpha + \dfrac{1}{2}(2XY - Z^2) = 0 \text{ d'inconnue } \alpha \text{ a deux solutions réelles} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(X+Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X+Y+1) = 0 \\ (X+Y)^2 - 2(2XY - Z^2) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(X+Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X+Y+1) = 0 \\ (X-Y)^2 + 2Z^2 \geq 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow 2(X+Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X+Y+1) = 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \Sigma \text{ est } 2(x+y)^3 - 3(2xy - z^2)(x+y+1) = 0.}$$

d) Soit $M = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ un point de S.
Puisque F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on sait qu'une équation du plan tangent à S en M_0 est

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial x}((x_0,y_0))(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}((x_0,y_0))(y-y_0) = (x_0^3+y_0^3-3x_0y_0)+3(x_0^2-y_0)(x-x_0)+3(y_0^2-x_0)(y-y_0)$$
$$= 3(x_0^2-y_0)x+3(y_0^2-x_0)y-2x_0^3-2y_0^3+3x_0y_0.$$

Une équation du plan P_0 tangent à S en $M_0 = (x_0, y_0, F(x_0,y_0))$ est $z = 3(x_0^2-y_0)x+3(y_0^2-x_0)y-2x_0^3-2y_0^3+3x_0y_0$.

De plus,

$$P_0 \parallel (xOy) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0^2-y_0=0 \\ y_0^2-x_0=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0=x_0^2 \\ x_0^4-x_0=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x_0=y_0=0 \text{ ou } x_0=y_0=1 \Leftrightarrow M_0=(0,0,0) \text{ ou } M_0=(1,1,-1).$$

P_0 est horizontal si et seulement si $M_0 = (0,0,0)$ ou $M_0 = (1,1,-1)$.

EXERCICE 3

1) a) Rappelons le **théorème de dérivation sous le signe somme (formule de Leibniz)**.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ (x,t)\mapsto f((x,t))$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I\times J$ et dérivable par rapport à x. On suppose que :

- pour tout x de I, les fonctions $t\mapsto f((x,t))$ et $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}((x,t))$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;
- pour tout $t\in J$, la fonction $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}((x,t))$ est continue ;
- il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I\times J$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}((x,t))\right| \leq \varphi(t).$$

Alors, la fonction $g\ :\ x\mapsto \int_J f((x,t))\,dt$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall x\in I,\ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}((x,t))\,dt.$$

Soit alors a un réel strictement positif donné. Considérons $f\ :\ \begin{array}{ccc}[-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{x\sin(t)}\end{array}$ (ainsi, $I=[-a,a]$ et $J=[0,\frac{\pi}{2}]$). f admet sur $[-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ une dérivée partielle par rapport à x et pour $((x,t))\in[-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}((x,t)) = \sin(t)e^{x\sin(t)}.$$

- pour tout réel $x\in[-a,a]$, les fonctions $t\mapsto e^{x\sin(t)}$ et $t\mapsto \sin(t)e^{x\sin(t)}$ sont continues sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$ et en particulier
  continues par morceaux et intégrables sur ce segment ;
- pour tout réel t de $[0,\frac{\pi}{2}]$, la fonction $x\mapsto \sin(t)e^{x\sin(t)}$ est continue sur $[-a,a]$;
- pour $(x,t)\in[-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}((x,t))\right| = |\sin(t)|e^{x\sin(t)} \leq |\sin(t)|e^{|x\sin(t)|} \leq e^a = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ (car constante).

D'après le théorème de Leibniz, pour tout réel $a>0$ g est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, la dérivée de g s'obtient par dérivation sous le signe somme.

g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^{\pi/2}\sin(t)e^{x\sin(t)}\,dt$.

b) La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car deux fois dérivable et de dérivée seconde négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $-\sin(t) \leq 0$). On sait alors que son graphe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est au-dessous de sa tangente en $(0,0)$ et au-dessus de la corde joignant les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$. On a montré que

$$\boxed{\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ t \geq \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}.}$$

c) Soit $x \in]-\infty, 0[$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ et donc $e^{x\sin(t)} \leq e^{2tx/\pi}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin(t)}\ dt \leq \int_0^{\pi} 2e^{2tx/\pi}\ dt = \left[\frac{\pi}{2x}e^{2tx/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2x}(e^{2x} - 1).$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ et donc $e^{x\sin(t)} \geq e^{2tx/\pi}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin(t)}\ dt \geq \int_0^{\pi} 2e^{2tx/\pi}\ dt \frac{\pi}{2x}(e^x - 1) \leq \frac{\pi e^x}{2x}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) \leq \frac{\pi e^x}{2x} \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) \geq \frac{\pi}{2x}(e^{2x} - 1).}$$

d) • **Etude en** $-\infty$. Pour $x < 0$, on a $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi e^x}{2x}$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi e^x}{2x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

• **Etude en** $+\infty$**.** Pour $x > 0$, on a $\frac{g(x)}{x} \geq \frac{\pi e^x}{2x^2}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi e^x}{2x^2} = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ et en particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

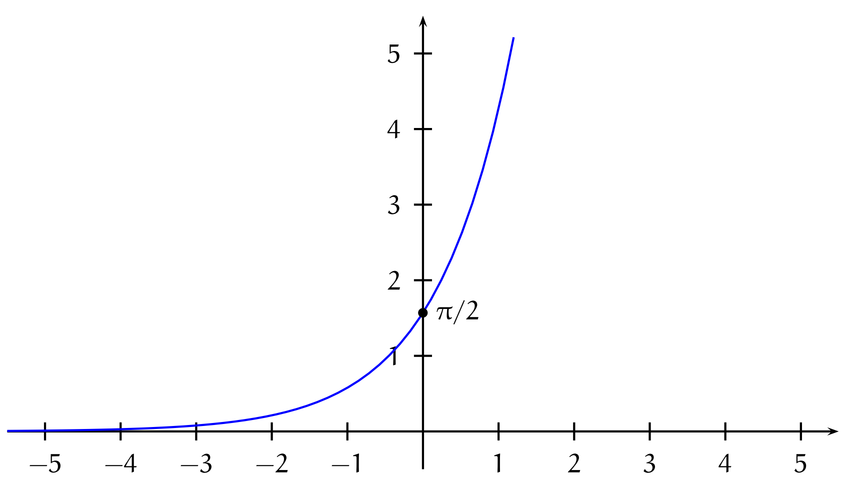
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0,\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty.}$$

e) Pour tout réel x et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t)e^{x\sin(t)} \geq 0$. Par suite, pour tout réel x, on a

$$g'(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{x\sin(t)}\ dt \geq 0.$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Allure du graphe de g**.**



2) a) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout réel x, on a

$$f((x,t)) = e^{x\sin(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{n!} x^n.$$

b) Théorème d'intégration terme à terme. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définies, continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers une fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, continue par morceaux sur I.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,dt < +\infty$, alors

- la série numérique de terme général $\int_I f_n(t)\,dt$ converge ;
- f est intégrable sur I ;
- $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f_n(t) = \frac{\sin^n tx^n}{n!}$. La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto e^{x\sin(t)}$ qui est continue par morceaux sur I. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{\pi}{2} e^{|x|} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la série numérique de terme général $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n tx^n}{n!}\,dt$ converge et de plus

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin(t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n tx^n}{n!}\right)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt.$$

Ainsi, la fonction g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{W_n}{n!} = \frac{1}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt.}$$

c) Comme à la question 1)a), g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Leibniz ou encore g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x}(\sin(t)e^{x\sin(t)})\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)e^{x\sin(t)}\,dt.$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x(g''(x) - g(x)) = x\int_0^{\pi/2} (\sin^2(t) - 1)e^{x\sin(t)}\,dt = x\int_0^{\pi/2} -\cos^2(t)e^{x\sin(t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (x\cos(t)e^{x\sin(t)})\,dt.$$

Maintenant, les deux fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto e^{x\sin(t)}$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} x(g''(x) - g(x)) &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (x\cos(t)e^{x\sin(t)})\,dt \\ &= \Big[-\cos(t)e^{x\sin(t)}\,dt\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{x\sin(t)}\,dt \\ &= 1 - g'(x). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = 1.}$$

d) On sait que la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Par suite, pour x réel,

$$\begin{aligned}
x(g''(x) - g(x)) + g'(x) &= x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1)+n)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{W_n}{n!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{W_n}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n!} x^{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{W_{n+1}}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{n-1}}{(n-1)!} x^n = W_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = 1 &\Rightarrow W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}}{n!}\\
&\Rightarrow W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.}$$

Retrouvons ce résultat à l'aide d'une intégration par parties.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \sin^n(t)$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^n(t)\ dt\\
&= [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (n\cos(t)\sin^{n-1}(t)\ dt = n\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)\ dt\\
&= n\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))\sin^{n-1}(t)\ dt = n(W_{n-1} - W_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, $W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1})$ puis $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ et finalement on retrouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

e) Soit $h(x) = \sum b_n x^n$ une série entière dont le rayon R est supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$, on a

$$\begin{aligned}
x(g''(x) - g(x)) + g'(x) &= x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 b_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n = b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1}) x^n
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on a alors

$$
\begin{aligned}
h \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1})x^n = 1\\
&\Leftrightarrow b_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1} = 0\\
&\Leftrightarrow b_1 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_{2p} = \frac{1}{(2p)^2} \times \frac{1}{(2(p-1))^2} \times \ldots \times \frac{1}{(2\times 1)^2} \times b_0\\
&\text{et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(2p+1)^2} \times \frac{1}{(2p-1)^2} \times \ldots \times \frac{1}{3^2} \times b_1\\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p+1} = \frac{((2p)\times(2(p-1))\times\ldots\times 2)^2}{((2p+1)\times(2p)\times(2p-1)\times\ldots\times 3\times 2)^2}\\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2}.
\end{aligned}
$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$,

$$h \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2}.$$

Il reste à déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues. Tout d'abord, pour tout réel x et tout entier naturel p,

$$|b_{2p}x^{2p}| = |b_0| \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} \leq |b_0| \frac{(x^2)^p}{p!}.$$

Comme la série de terme général $|b_0|\dfrac{(x^2)^p}{p!}$ est une série convergente (de somme $|b_0|e^{x^2}$), la série de terme général $b_{2p}x^{2p}$ convergence pour tout réel x (et tout choix de b_0).

Soit maintenant un réel x non nul donné. Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{b_{2p+1}x^{2p+1}}{b_{2p-1}x^{2p-1}}\right| = \frac{2^{2p+2}}{2^{2p}} \times \frac{((p+1)!)^2}{(p!)^2} \times \frac{((2p-1)!)^2}{((2p+1)!)^2} \times x^2 = \frac{4x^2(p+1)^2}{(2p(2p+1))^2} = \frac{x^2(p+1)^2}{p^2(2p+1)^2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. La règle de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série de terme général $b_{2p}x^{2p}$ converge pour tout réel x. Finalement, toutes les séries entières obtenues ont un rayon de convergence infini ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) développables en série entière sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto \lambda \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parmi ces solutions, g est la solution telle que $g(0) = a_0 = \dfrac{W_0}{0!} = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $h(0) = \lambda$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}.}$$

f) Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E) s'écrit encore

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = \frac{1}{x}.$$

Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto -1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme

$$x \mapsto f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

où f_0 est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et f_1 et f_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée $xy'' + y' - xy = 0$.

3) Soient $a < 0$ puis $x \in [a, 0]$. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \leq t,$$

et donc

$$e^{xt} \leq e^{x\sin(t)} \leq e^{2xt/\pi} \text{ (puisque } x \leq 0).$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^{\pi/2} e^{xt}\ dt \leq g(x) \leq \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi}\ dt,$$

et donc

$$\forall x \in [a, 0[,\ \frac{e^{\pi x/2} - 1}{x} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}\frac{e^x - 1}{x}.$$

Maintenant, les deux membres extrêmes de cet encadrement sont des fonctions intégrables sur $[a, 0[$ car continues sur $[a, 0[$ et prolongeables par continuité en 0 (ces deux fonctions tendent vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0). Par intégration, on obtient

$$\boxed{\forall a \in]-\infty, 0[,\ \int_a^0 \frac{e^{\pi x/2} - 1}{x}\ dx \leq \int_a^0 g(x)\ dx \leq \frac{\pi}{2}\int_a^0 \frac{e^x - 1}{x}\ dx.}$$

Maintenant, la fonction g est (continue et) positive sur $]-\infty, 0]$. Par suite, g est intégrable sur $]-\infty, 0]$ si et seulement si la fonction $a \mapsto \int_a^0 g(x)\ dx$ est majorée sur $\mathbb{R}^-$.

Mais la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2}\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 - e^x}{-x}$ est continue et positive sur $]-\infty, 0[$, prolongeable par continuité en 0 et négligeable en $-\infty$ devant $\frac{1}{x^2}$ d'après les théorèmes de croissances comparées. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2}\frac{e^x - 1}{x}$ est intégrable sur $]-\infty, 0[$ puis que

$$\forall a < 0,\ \int_a^0 g(x)\ dx \leq \frac{\pi}{2}\int_a^0 \frac{e^x - 1}{x}\ dx \leq \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{e^x - 1}{x}\ dx < +\infty,$$

et donc

$$\boxed{g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^-.}$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_x\ :\ t \mapsto f((x, t)) = e^{x\sin(t)}$ est 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de la fonction φ_x converge simplement (et même normalement) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ_x.

b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, $d_k(x)$ est le coefficient de Fourier complexe d'indice k de la fonction φ_x. Puisque la fonction φ_x est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval nous permet d'écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_x(t)|^2\ dt.$$

c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(x, t)e^{-ikt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\left|\frac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Comme la série numérique de terme général $\dfrac{|x|^n}{n!}$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto \dfrac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$d_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^n(t)x^n}{n!}\right)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt.$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}(2i)^n\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt &= \int_0^{2\pi}(e^{it}-e^{-it})^n e^{-ikt}\,dt\\ &= \sum_{p=0}^{n}C_n^p\int_0^{2\pi}(e^{it})^p(e^{-it})^{n-p}e^{-ikt}\,dt = \sum_{p=0}^{n}C_n^p\int_0^{2\pi}e^{i(2p-k-n)t}\,dt.\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(2p-k-n)t}\,dt = \left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } k \neq 2p-n\\ 2\pi \text{ si } k = 2p-n\end{array}\right.$. Donc,

1er cas. Si k n'est pas élément de $\{-n, -(n-2), -(n-4), \ldots, n-4, n-2, n\}$, toutes les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(2p-n-k)t}\,dt$ sont nulles et dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt = 0$.

2 ème cas. Si $k \in \{-n, -(n-2), -(n-4), \ldots, n-4, n-2, n\}$, on peut poser $k = 2p_0 - n$ pour un certain $p_0 \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{p=0}^{n}C_n^p\int_0^{2\pi}e^{i((n-k)-2p)t}\,dt = \frac{C_n^{p_0}}{(2i)^n}\int_0^{2\pi}e^{i(2p_0-n-k)t}\,dt = \frac{2\pi C_n^{p_0}}{(2i)^n}.$$

Déterminons alors une expression de $d_k(x)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}$ donné,

$$\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt \neq 0 \Leftrightarrow \exists p \in [\![0, n]\!]/\ n = 2p - k\ (*).$$

La condition $(*)$ impose $-k \leq n \leq 2n - k$ et donc $n \geq k$. La condition $(*)$ impose aussi à n d'avoir la parité de k ce qui montre que n est de la forme $k + 2m$, $m \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, si $n = k+2m$, $m \in \mathbb{N}$, alors $p = \dfrac{n+k}{2} = k+m$ est un entier naturel vérifiant $0 \leq p = k+m \leq k+2m = n$ et donc $(*)$ est vérifiée.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}d_k(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^{2\pi}\sin^n(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2m}}{(k+2m)!}\int_0^{2\pi}\sin^{k+2m}(t)e^{-ikt}\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2m}}{(k+2m)!}\frac{2\pi C_{k+2m}^{k+m}}{(2i)^{k+2m}} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2m}}{(k+m)!m!(2i)^{k+2m}}.\end{aligned}$$

Si maintenant $k \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$d_k(x) = \overline{d_{-k}(x)} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{-k+2m}}{(-k+m)!m!(-2i)^{-k+2m}}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } k \in \mathbb{Z}^+,\ d_k(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!(k+m)!}\left(\frac{x}{2i}\right)^{k+2m},\\ \text{Si } k \in \mathbb{Z}^-,\ d_k(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!(-k+m)!}\left(\frac{-x}{2i}\right)^{-k+2m}.\end{array}}$$

