

## Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

## Epreuve de Mathématiques A PC

**Partie A : Etude de la fonction f.****1) Solution d'une équation différentielle.**

a) Notons I l'un des deux intervalles  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$ . Pour  $x \in I$ , on a  $e^x - 1 \neq 0$ . Par suite, sur I, l'équation différentielle (E) équivaut à l'équation différentielle :

$$y' + \frac{e^x}{e^x - 1}y = \frac{1}{e^x - 1} \quad (E').$$

Maintenant, les deux fonctions  $a : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$  et  $b : x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$  sont continues sur I en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. On sait alors que les solutions de (E) sur I constituent un  $\mathbb{R}$ -espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I, (e^x - 1)f'(x) + e^x f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, ((e^x - 1)f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (e^x - 1)f(x) = x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x + \lambda}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{x + \lambda}{e^x - 1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

b) Soit f une éventuelle solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . Les restrictions de f à  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$  sont solutions de (E) sur ces intervalles. Donc, nécessairement, il existe deux réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\forall x < 0$ ,  $f(x) = \frac{x + \lambda_1}{e^x - 1}$  et  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = \frac{x + \lambda_2}{e^x - 1}$ . Enfin, quand  $x = 0$  dans l'égalité (E), on obtient  $f(0) = 1$ . En résumé, si f est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x + \lambda_1}{e^x - 1} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x + \lambda_2}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Réciproquement, une telle fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , solution de (E) sur  $\mathbb{R}^*$  et même sur  $\mathbb{R}$  si elle est dérivable en 0. En résumé, une telle fonction est solution si et seulement si elle est dérivable en 0.

Si  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\frac{x + \lambda_1}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\lambda_1}{e^x - 1}$  et en particulier  $\frac{x + \lambda_1}{e^x - 1}$  n'a pas de limite réelle en 0 à gauche de sorte que f n'est pas dérivable en 0. Donc,  $\lambda_1 = 0$ . De même,  $\lambda_2 = 0$ .

Si maintenant  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Or, quand x tend vers 0,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x) = f(0) - \frac{x}{2} + o(x).$$

Dans ce cas, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est par suite dérivable en 0. Mais alors f est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

(E) admet une solution et une seule sur  $\mathbb{R}$  à savoir la fonction  $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

## 2) Etude de f en 0.

a) Quand  $x$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

En tenant compte de  $f(0) = 1$ , on a donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

b) • f admet en 0 un développement limité d'ordre 0 à savoir  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$ . f est donc continue en 0.

• f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ . f est donc dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

• f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 mais on sait que l'existence d'un tel développement n'impose pas à f d'être deux fois dérivable en 0.

c) On sait déjà que f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ . Plus précisément, f est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$  et pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Maintenant, quand  $x$  tend vers 0

$$\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2}) - 1 - x(1 + x) + o(x^2)}{(x + o(x))^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{1}{2} + o(1) = f'(0) + o(1).$$

Ainsi, la fonction  $f'$  est continue en 0 et donc

f est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Une équation de T est  $y = f(0) + f'(0)x$  ou encore  $y = 1 - \frac{1}{2}x$ . De plus, quand  $x$  tend vers 0, d'après la question a) on a

$$f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Par suite, l'expression  $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$  est du signe de  $\frac{x^2}{12}$  au voisinage de 0 et donc positive au voisinage de 0. Ainsi,

T admet pour équation cartésienne  $y = 1 - \frac{1}{2}x$  et (C) est au-dessus de T au voisinage de 0.

## 3) Variations de f.

a) g est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x$  réel,

$$g'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x.$$

$g'$  est donc strictement négative sur  $] -\infty, 0[$  et strictement positive sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit le tableau de variations de  $g$ .

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$ | $+$       |
| $g$     |           |     |           |

$g$  admet en  $0$  un minimum local strict égal à  $0$  et donc

$g$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^*$  et s'annule en  $0$ .

b) Le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}^*$  est le signe de  $-g$  et donc, en tenant compte de  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $f'$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que

$f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

c) En  $+\infty$ ,  $f(x) \sim \frac{x}{e^x}$  et donc, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

En  $-\infty$ ,  $f(x) \sim \frac{x}{-1} = -x$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

• Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , la droite  $(Ox)$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ . De plus, puisque  $f$  tend vers  $0$  en  $+\infty$  en décroissant strictement,  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $(C)$  est strictement au-dessus de la droite  $(Ox)$  sur  $\mathbb{R}$ .

• Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , on a

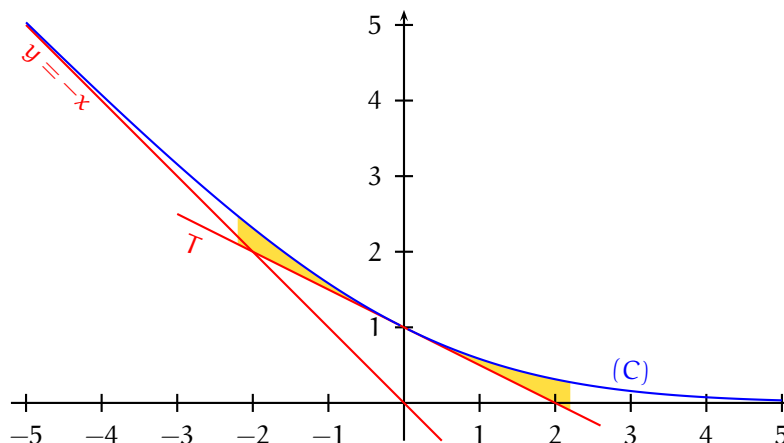
$$f(x) = \frac{-x}{1 - e^x} = -x(1 + e^x + o(e^x)) = -x - xe^x + o(xe^x) = -x + o(1).$$

On en déduit que la droite  $(D_2)$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ . Ensuite, pour  $x$  réel non nul donné

$$f(x) - (-x) = \frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{xe^x}{e^x - 1} = e^x f(x) > 0,$$

et comme d'autre part  $f(0) > -0$ , on a montré que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > -x$ .  $(C)$  est strictement au-dessus de  $(D_2)$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Allure de  $(C)$ .



#### 4) Expression hyperbolique de f.

a) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \times \frac{2}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left( \frac{2}{e^x - 1} + 1 - 1 \right) = \frac{x}{2} \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right) \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{e^{x/2}(e^{x/2} + e^{-x/2})}{e^{x/2}(e^{x/2} - e^{-x/2})} - 1 \right) = \frac{x}{2} \left( \frac{2 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \right) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \right).$$

b) i) On a déjà  $f_1(0) = 0 = \frac{0}{2} \operatorname{t}\left(\frac{0}{2}\right)$ . Ensuite, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f_1(x) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \right) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 - \frac{1}{x} + 1 \right) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x}{2} \operatorname{t}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{x}{2} \operatorname{t}\left(\frac{x}{2}\right).$$

ii) Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , puisque la fonction  $\operatorname{th}$  est impaire,

$$f_1(-x) = \frac{-x}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{th}(-x/2)} - \frac{1}{-x/2} \right) = \frac{-x}{2} \times - \left( \frac{1}{\operatorname{th}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) = f_1(x).$$

et donc

$f_1$  est paire.

iii) Soit  $x_0$  un réel strictement positif. D'après la question 2)d), on sait que  $\Gamma$  est au-dessus de  $(C)$ . Soient alors  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq x_0 \text{ et } 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq f(x)\}$  et  $\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -x_0 \leq x \leq 0 \text{ et } 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq f(x)\}$ .

L'aire de  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ) est  $\int_0^{x_0} f_1(x) dx$  (resp.  $\int_{-x_0}^0 f_1(x) dx$ ). Puisque  $f_1$  est paire, on sait que ces intégrales sont égales.

Par suite,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ont même aire.

#### 5) Intégrale impropre associée à f.

a)  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, d'après un théorème de croissances comparées,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ (puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^x = 0).$$

On en déduit que  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et donc que  $I$  existe.

b) L'application  $t \mapsto e^{-t}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme décroissant de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, 1[$ .

On peut donc poser  $u = e^{-t}$ . On a alors  $t = \ln u$  et aussi  $dt = \frac{du}{u}$  et on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_1^0 \frac{\ln u}{\frac{1}{u} - 1} \times \frac{du}{u} = \int_1^0 \frac{\ln u}{1 - u} du = \int_0^1 \frac{\ln u}{u - 1} du.$$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln u}{u - 1} du.$$

c) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La fonction  $u \mapsto u^k \ln u$  est continue sur  $]0, 1]$  et est négligeable devant  $\frac{1}{\sqrt{u}}$  en 0. On en déduit que la fonction  $u \mapsto u^k \ln u$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et donc que  $I_k$  existe.

Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Les deux fonction  $u \mapsto \frac{u^{k+1}}{k+1}$  et  $u \mapsto \ln u$  sont de classe  $C^1$  sur  $[\varepsilon, 1]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$-\int_{\varepsilon}^1 u^k \ln u \, du = -\left[\frac{u^{k+1} \ln u}{k+1}\right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{u^k}{k+1} \, du = \frac{\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}(1 - \varepsilon^{k+1}).$$

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient  $I_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ .

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

**d) théorème d'intégration terme à terme :**

Soit  $I$  un intervalle quelconque. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur  $I$ , intégrables sur  $I$  telle que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux

sur  $I$ . Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)| \, dx < +\infty$ , alors

- $f$  est intégrable sur  $I$ ,
- la série numérique de terme général  $\int_I f_n$  converge,
- $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ .

(Remarque : la condition  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)| \, dx < +\infty$  implique l'intégrabilité de chaque  $f_n$ .)

e) Soit  $u \in ]0, 1[$ . Posons  $g(u) = \frac{\ln u}{u-1}$ . On a

$$g(u) = -\frac{\ln u}{1-u} = -\ln u \sum_{k=0}^{+\infty} u^k = \sum_{k=0}^{+\infty} -u^k \ln u.$$

Pour  $u \in ]0, 1[$  et  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $g_k(u) = -u^k \ln u$ . La série de fonctions de terme général  $g_k$  converge simplement sur  $]0, 1[$  vers la fonction  $g$  qui est continue sur  $]0, 1[$ . Chaque  $g_k$  est intégrable sur  $]0, 1[$  d'après la question c) et toujours d'après cette question

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |g_k(u)| \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(u) \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

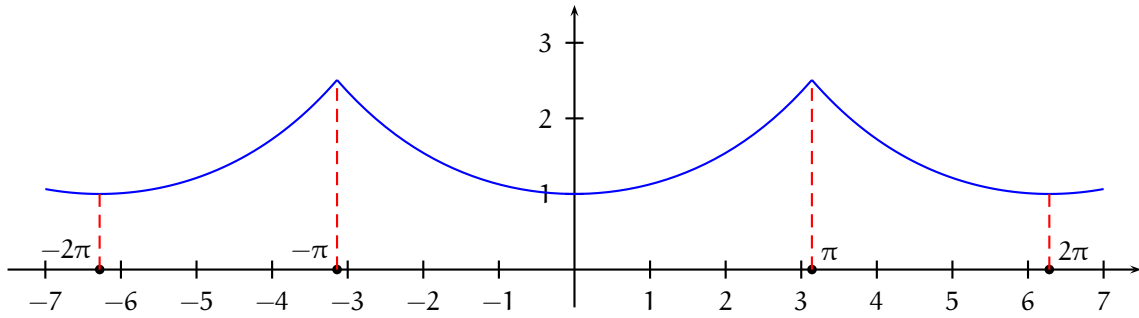
On peut donc intégrer terme à terme et on obtient  $\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(u) \, du = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Partie B : Développement en série entière de f.**

**1) Un développement en série de FOURIER.**

a) Allure du graphe de  $g_a$ .



$g_a$  est continue sur  $] -\pi, \pi]$ . De plus, par  $2\pi$ -périodicité,

$$g_a(-\pi^+) = \text{ch}(a(-\pi)) = \text{ch}(a\pi) = g_a(\pi) = g_a(-\pi).$$

$g_a$  est donc continue à droite en  $-\pi$  et par suite continue sur  $[-\pi, \pi]$ . De nouveau par  $2\pi$ -périodicité,

**$g_a$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .**

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une double intégration par parties (licite) fournit

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt &= \left[ \frac{\text{sh}(at)}{a} \cos(nt) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\text{sh}(at)}{a} \times (-n \sin(nt)) \, dt = (-1)^n \frac{\text{sh}(a\pi)}{a} + \frac{n}{a} \int_0^\pi \text{sh}(at) \sin(nt) \, dt \\ &= (-1)^n \frac{\text{sh}(a\pi)}{a} + \frac{n}{a} \left( \left[ \frac{\text{ch}(a\pi)}{a} \sin(nt) \right] - \int_0^\pi \frac{\text{ch}(a\pi)}{a} \times (n \cos(nt)) \, dt \right) \\ &= (-1)^n \frac{\text{sh}(a\pi)}{a} - \frac{n^2}{a^2} \int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) \int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt = (-1)^n \frac{\text{sh}(a\pi)}{a}$  et donc que

$$\int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt = (-1)^n \frac{\text{sh}(a\pi)}{a} \times \frac{a^2}{n^2 + a^2} = (-1)^n \frac{a \text{sh}(a\pi)}{n^2 + a^2}.$$

**$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt = (-1)^n \frac{a \text{sh}(a\pi)}{n^2 + a^2}.$**

c) La fonction  $g_a$  est paire. Par suite,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(g_a) = 0$ . Puis, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_a(t) \cos(nt) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{ch}(at) \cos(nt) \, dt = (-1)^n \frac{2a \text{sh}(a\pi)}{\pi(n^2 + a^2)}.$$

**$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(g_a) = (-1)^n \frac{2a \text{sh}(a\pi)}{\pi(n^2 + a^2)}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(g_a) = 0.$**

**d) Théorème de convergence simple d'une série de FOURIER (théorème de DIRICHLET).**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ , la série de Fourier de  $f$  en  $x$  converge et a pour somme  $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ . En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , la somme de la série de FOURIER de  $f$  en  $x$  est  $f(x)$ .

**Théorème de convergence normale d'une série de FOURIER.**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors la série de FOURIER de  $f$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

La fonction  $g_a$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la série de FOURIER de  $g_a$  converge normalement et donc simplement vers  $g_a$  sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout réel  $t$ , on a

$$g_a(t) = \frac{a_0(g_a)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g_a) \cos(nt) = \frac{\text{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a \text{sh}(a\pi)}{a^2 + n^2} \cos(nt).$$

Quand  $t = \pi$ , on obtient en particulier

$$\text{ch}(a\pi) = \frac{\text{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a \text{sh}(a\pi)}{a^2 + n^2} \times (-1)^n = \frac{\text{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \text{sh}(a\pi)}{a^2 + n^2}.$$

Comme  $a \neq 0$ , on a encore  $\text{sh}(a\pi) \neq 0$  et après division des deux membres par  $\text{sh}(a\pi)$ , on obtient

$$\frac{1}{\text{th}(a\pi)} - \frac{1}{\pi a} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

e) Soient alors  $x \in \mathbb{R}^*$  puis  $a = \frac{x}{\pi} (\neq 0)$ . L'égalité précédente s'écrit maintenant

$$t(x) = \frac{1}{\text{th } x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{x}{\pi}}{\frac{x^2}{\pi^2} + n^2} = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \pi^2 n^2}.$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \pi^2 n^2} = t(x).$$

## 2) Etude d'une série entière.

a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $f_n(t) = \frac{1}{t^2 + n^2 \pi^2}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a alors

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

Comme la série numérique de terme général  $\frac{1}{n^2 \pi^2}$  converge, on a montré que

la série de fonctions de somme  $m$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

b) • **Théorème de comparaison série-intégrale** : étant donné une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général  $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  est convergente. En particulier, la série  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

• D'après le cours, pour  $p \geq 2$ ,  $\zeta(p)$  existe.

• Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

Puisque la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^p}$  est continue, positive et décroissante sur  $]0, +\infty[$ , pour  $k$  entier naturel élément de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ , on a

$$\frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^p} \leq \frac{1}{(k-1)^p}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^p},$$

ou encore

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}.$$

On a montré que

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2, \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}.$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$  à  $p$  fixé, on obtient  $\zeta(p) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p} \leq \zeta(p)$  avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p} = \left[ -\frac{1}{(p-1)t^{p-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Par suite,  $\zeta(p) - 1 \leq \frac{1}{p-1} \leq \zeta(p)$ . Comme d'autre part  $\zeta(p) = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots \geq 1$ , on a montré que

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 \leq \zeta(p) \leq 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Puisque  $1 + \frac{1}{p-1}$  tend vers 1 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \zeta(p) = 1.$$

c) Soit  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|\alpha_{2k} t^{2k}| = \frac{\zeta(2k+2) |t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) |t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} \leq \frac{2|t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^k.$$

Puisque  $t \in ]-\pi, \pi[$ , on a  $0 \leq \frac{t^2}{\pi^2} < 1$  et la série géométrique de terme général  $\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^k$  converge. On en déduit que la série de terme général  $\alpha_{2k} t^{2k}$  converge absolument et donc converge.

Pour tout réel  $t$  de  $]-\pi, \pi[$ , la série entière  $\sum \alpha_{2k} t^{2k}$  converge.

d) Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $t \in ]-\pi, \pi[$ .

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \sum_{k=0}^N \alpha_{2k} t^{2k} = \sum_{k=0}^N \left( \frac{(-1)^k t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) \quad (\text{somme d'un nombre fini de séries convergentes}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \left( \sum_{k=0}^N \left( \frac{-t^2}{\pi^2 n^2} \right)^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \frac{1 - \left( \frac{-t^2}{\pi^2 n^2} \right)^{N+1}}{1 - \left( \frac{-t^2}{\pi^2 n^2} \right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^N \left( \frac{t^2}{\pi^2 n^2} \right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$



$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in ]-\pi, \pi[, S_N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^N \left(\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2}.$$

Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $t \in ]-\pi, \pi[$ .

$$\begin{aligned} |S_N(t) - m(t)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^N \left(\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2 \pi^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^N \left(\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1} \frac{1}{t^2 + n^2 \pi^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} \frac{1}{t^2 + n^2 \pi^2} = \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]-\pi, \pi[, |S_N(t) - m(t)| \leq \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t).$$

e) Soit  $t \in ]-\pi, \pi[$ . On a toujours  $0 \leq \frac{t^2}{\pi^2} < 1$  et donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t) = 0$ . On en déduit que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} |S_N(t) - m(t)| = 0$  et comme d'autre part,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(t) = h(t)$ , on a montré que

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, h(t) = m(t).$$

### 3) Développement en série entière de $f$ .

a) Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de l'origine à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  est développable en série entière si et seulement il existe  $r > 0$  et il existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tels que : 1)  $f$  est définie sur  $] -r, r[$ , 2) la série entière  $\sum a_n t^n$

converge sur  $] -r, r[$ , 3)  $\forall t \in ] -r, r[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ .

b) D'après les questions B)1)e) et B)2)e), pour  $x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ ,

$$t(x) = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2 \pi^2} = 2xm(x) = 2xh(x) = 2x \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k}.$$

Puisque  $t(0) = 0$ , les égalités précédentes sont encore valables pour  $x = 0$ . On a montré que

$$\forall x \in ]-\pi, \pi[, t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\alpha_{2k} x^{2k+1}$$

et en particulier, la fonction  $t$  est développable en série entière en 0.

c) Soit  $x \in ]-\pi, \pi[$ . Alors  $\frac{x}{2} \in ]-\pi, \pi[$ , et d'après la question A)4)b) et la question précédente, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{x}{2} + f_1(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} t\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{2^{2k+1}} x^{2k+2} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2} 2^{2k+1}} x^{2k+2} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \zeta(2n)}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} x^{2n}. \end{aligned}$$

$\forall x \in ]-2\pi, 2\pi[, f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n x^{2n}$  où  $\beta_n = \frac{((-1)^{n-1} \zeta(2n))}{\pi^{2n} 2^{2n-1}}$   
 et en particulier, la fonction  $f$  est développable en série entière en 0.

d)  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ . D'autre part,  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -\pi, \pi[$  en tant que fonction développable en série entière sur cet intervalle. Finalement

$f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

D'autre part, on sait que le coefficient de  $x^k$  dans le développement de  $f$  en série entière est  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ . Donc,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -\frac{1}{2}$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(2n+1)}(0) = 0$  et enfin, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(2n)}(0) = (2n)! \times \beta_n = \frac{((-1)^{n-1} (2n)! \zeta(2n))}{\pi^{2n} 2^{2n-1}}$ .

$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(2n+1)}(0) = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(2n)}(0) = \frac{((-1)^{n-1} (2n)! \zeta(2n))}{\pi^{2n} 2^{2n-1}}$ .

e) D'après la question A)2)a), quand  $x$  tend vers 0, on a  $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ . On en déduit en particulier que  $\frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{12}$  et donc que  $f''(0) = \frac{1}{6}$ . D'autre part,  $f''(0) = \frac{(-1)^0 \times 2! \times \zeta(2)}{\pi^2 \times 2^1}$ . On en déduit que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

D'après la question A)5)e), on a aussi  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$