Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1.

1. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Soit f une fonction dérivable sur J. On note $\mathcal{E}_h$ l'équation différentielle : $xy' + \alpha y = 0$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } \mathcal{E}_h \text{ sur } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) + \alpha f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in J,\ f'(x) + \frac{\alpha}{x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ e^{\alpha \ln|x|} f'(x) + \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln|x|} f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (e^{\alpha \ln|x|} f)'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ (|x|^{\alpha} f)'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ |x|^{\alpha} f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ f(x) = C|x|^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E}_h \text{ sur } J \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto C|x|^{-\alpha},\ C \in \mathbb{R}.}$$

2. **2a)** D'après la question 1,

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{E}_h) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto \begin{cases} C_1 x^{-\alpha} \text{ si } x > 0 \\ C_2(-x)^{-\alpha} \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$$

2b) Puisque $\alpha > 0$, $|x|^{-\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Donc si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, une solution de $\mathcal{E}_h$ sur I n'a pas une limite finie en 0 ou encore une solution non nulle de $(\mathcal{E}_h)$ sur I n'a pas une limite finie en 0. D'autre part, la fonction nulle sur I est une solution de $\mathcal{E}_h$ admettant une limite finie en 0. Finalement

$$\boxed{(E_h) \text{ admet une et une seule solution ayant une limite finie en } 0, \text{ la fonction nulle sur I.}}$$

3. Soient a et b deux réels.

• Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $\mathcal{E}$ s'écrit $y' + \dfrac{\alpha}{x} y = \dfrac{F(x)}{x}$. Or les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ sont **continues** sur l'**intervalle** $]-\infty, 0[$. D'après le théorème de Cauchy, pour tout couple $(x_0, y_0) \in]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$, il existe une et une seule solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, 0[$ prenant la valeur y_0 en x_0. En particulier, il existe une et une seule solution f_1 de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, 0[$ telle que $f_1(-1) = a$.

• De même, il existe une et une seule solution f_2 de $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$ telle que $f_2(1) = b$.

• Finalement, il existe une et une seule solution f de $\mathcal{E}$ sur I telle que $f(-1) = a$ et $f(1) = b$ à savoir la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x < 0 \\ f_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathcal{E} \text{ admet une et une seule solution sur I telle que } f(-1) = a \text{ et } f(1) = b.}$$

4. Soient g et h deux solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur I ayant une limite finie en 0. Alors $g - h$ est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_h$ sur I ayant une limite finie en 0. D'après la question 2a), $g - h$ est la fonction nulle sur I et donc $g = h$. Ceci montre l'unicité d'une solution de $\mathcal{E}$ ayant une limite finie en 0.

5. 5a) On sait que f est dérivable sur $]-R, R[$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Pour $x \in]-R, R[$, on a

$$\begin{aligned} xf'(x) + \alpha f(x) &= x \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} + \alpha \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} i a_i x^i + \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (i+\alpha) a_i x^i. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } \mathcal{E} \text{ sur }]-R, R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{i=0}^{+\infty} (i+\alpha) a_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i x^i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ (i+\alpha) a_i = \beta_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ a_i = \frac{\beta_i}{i+\alpha}. \end{aligned}$$

Maintenant $a_i = \dfrac{1}{i+\alpha}\beta_i \underset{i\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta_i}{i}$ et on sait alors que le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(\dfrac{\beta_i}{i})$ est le même que le rayon de convergence de la série entière associée à la suite (β_i) (série entière primitive) à savoir $+\infty$. On en déduit que

$$\boxed{R = +\infty.}$$

5b) D'après la question précédente, sous l'hypothèse $R > 0$, f est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\beta_i}{i+\alpha} x^i$. Ceci montre déjà l'unicité d'une solution de $\mathcal{E}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Mais comme $R = +\infty$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\beta_i}{i+\alpha} x^i$ est effectivement solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'existence d'une solution de $\mathcal{E}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

5c) La fonction g admet une limite finie en 0 et donc l'équation $\mathcal{E}$ admet exactement une solution sur I qui a une limite finie en 0.

6. 6a) Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1} e^t$ est continue sur $]0, x]$, positive et équivalente en 0 à $t^{\alpha-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 puisque $\alpha - 1 > -1$. On en déduit que la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1} e^t$ est intégrable sur $]0, x]$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \text{ l'intégrale } \int_0^x t^{\alpha-1} e^t \ dt \text{ est convergencte.}}$$

6b) La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1} e^t$ est continue sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x t^{\alpha-1} e^t \ dt$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1} e^x$. Puisque $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1} e^t \ dt = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^t \ dt + \int_1^x t^{\alpha-1} e^t \ dt$, il en est de même de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1} e^t \ dt$. Mais alors h est dérivable sur $]0, +\infty($ et pour $x > 0$,

$$xh'(x) + \alpha h(x) = x \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t \ dt + x \frac{1}{x^\alpha} x^{\alpha-1} e^x + \alpha \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t \ dt = e^x = F(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est solution de l'équation } \mathcal{E} \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

6c) Soit $x > 0$. En posant $t = ux$, on obtient

$$h(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} e^t \ \frac{dt}{x} = \int_0^1 u^{\alpha-1} e^{ux} \ du.$$

Par suite, pour $x > 0$,

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}e^0\,du \le h(x) \le \int_0^1 u^{\alpha-1}e^x\,du,$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha} \le h(x) \le \frac{e^x}{\alpha}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{1}{\alpha}$ quand x tend vers 0 et donc, d'après le théorème des gendarmes, h a une limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \frac{1}{\alpha}.}$$

6d) Ici, on a pour tout réel x $F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$. On a vu dans les questions précédentes que $\mathcal{E}$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ admettant une limite finie en 0 à savoir la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i+\alpha)i!}$. Comme h a une limite finie en 0, on a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i+\alpha)i!}.}$$

Exercice 2.

1. 1a) La fonction f est une fonction polynomiale et donc la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1b) Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}((x_0,y_0)) = 3x_0^2 - 3(1+y_0^2) = 3(x_0^2 - y_0^2 - 1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}((x_0,y_0)) = -3x_0(2y_0) = -6x_0y_0$.

$$\boxed{\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}((x_0,y_0)) = 3(x_0^2 - y_0^2 - 1) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}((x_0,y_0)) = -6x_0y_0.}$$

1c) Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}((x_0,y_0)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}((x_0,y_0)) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0 \\ x_0y_0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ -y_0^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0 = -1 \end{array}\right. .$$

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points critiques, les points } (1,0) \text{ et } (-1,0).}$$

1d) Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ posons $u((h,k)) = f((1+h,k))$. Ainsi, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u((h,k)) &= (1+h)^3 - 3(1+h)(1+k^2) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h - 3k^2 - 3k^2h \\ &= -2 + 3h^2 - 3k^2 + h^3 - 3k^2h. \end{aligned}$$

Montrons alors que l'expression $h^3 - 3k^2h$ est négligeable devant $\|(h,k)\|_\infty^2$ quand (h,k) tend vers $(0,0)$. Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|h^3 - 3k^2h| = |h||h^2 - 3k^2| \le |h|(h^2 + 3k^2) \le \|(h,k)\|_\infty(\|(h,k)\|_\infty^2 + 3\|(h,k)\|_\infty^2) = 4\|(h,k)\|_\infty^3,$$

et donc $|h^3-3k^2h| \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} \|(h,k)\|_\infty^2\,\varepsilon((h,k))$ où $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon((h,k))=0$. Finalement

$$\boxed{u((h,k)) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} -2+3h^2-3k^2+\|(h,k)\|_\infty^2\,\varepsilon((h,k)) \text{ où } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon((h,k))=0.}$$

En particulier $u((h,0))+2=3h^2+h^2\varepsilon((h,0))=h^2\left(3+\varepsilon((h,0))\right)$. Cette expression est du signe de $3h^2$ quand h est au voisinage de 0 et donc pour h petit et non nul, $u((h,0))+2>0$. De même, $u((0,k))+2=-3k^2+k^2\varepsilon((0,k))$ et donc pour k petit et non nul, $u((0,k))+2<0$. Finalement, dans tout voisinage de $(0,0)$ la fonction $(h,k)\mapsto u((h,k))-u((0,0))$ n'est pas de signe constant et donc

$$\boxed{\text{le point } (1,0) \text{ n'est pas un extremum local de } f.}$$

1e) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f((-x,y))=-f((x,y))$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le point } (-1,0) \text{ n'est pas un extremum local de } f.}$$

1f) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On sait que si f présente un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est nécessairement un point critique de f. Mais alors, les questions 1c), 1d) et 1e) montrent que

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local.}}$$

2. 2a) La fonction g est continue sur D qui est un compact de $\mathbb{R}^2$ (D est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ et borné et donc compact puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$). On en déduit que la fonction g admet sur D un minimum a et un maximum A.

2b) Si A n'est pas atteint sur le cercle C, A est atteint dans l'intérieur de D qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, en un point qui est un extremum local de g et donc de f. Puisque f n'admet pas d'extremum local

$$\boxed{A \text{ est atteint sur le cercle } C.}$$

2c) Soit $t\in\mathbb{R}$.

$g((\cos t,\sin t))=\cos^3 t-3\cos t(1+\sin^2 t)=\cos t(\cos^2 t-3-3\sin^2 t)=\cos t(\cos^2 t-3-3+3\cos^2 t)=2\cos t(2\cos^2 t-3)$.

Pour $t\in\mathbb{R}$, posons $h(t)=2\cos t(2\cos^2 t-3)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t\in\mathbb{R}$,

$$h'(t)=2[(-\sin t)(2\cos^2 t-3)+\cos t(-4\sin t\cos t)]=-2\sin t(2\cos^2 t-3+4\cos^2 t)=-6\sin t(2\cos^2 t-1).$$

Ainsi, h est 2π-périodique, paire, décroissante sur $[0,\frac{\pi}{4}]$, croissante sur $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ et croissante sur $[\frac{3\pi}{4},\pi]$. On en déduit que $A=h(\frac{3\pi}{4})=2\sqrt{2}$. De plus A est atteint au point $(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ et au point $(\cos\frac{-3\pi}{4},\sin\frac{-3\pi}{4})=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\boxed{A \text{ est atteint aux points } (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et } (-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\ A=2\sqrt{2}.}$$

2d) Pour $(x,y)\in D$, $(-x,y)\in D$ et $g((-x,y))=-g(x,y)$. Donc

$$\boxed{a \text{ est atteint au point } (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et } (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et} a=-2\sqrt{2}.}$$

Exercice 3.

1. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. La i-ème composante de $J_n v$ est égale $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}$ ou encore 1. Donc

$$\boxed{J_n v=v.}$$

2. Les colonnes de la matrice J_n sont égales et non nulles. Donc J_n est une matrice de rang 1 ou encore l'image de J_n est une droite vectorielle. Puisque $v = J_n v$, v est dans l'image de J_n et puisque v n'est pas nul, la famille (v) est une base de l'image de J_n. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}(J_n) = \mathrm{Vect}(v).}$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - \dim(\mathrm{Im}(J_n)) = n - 1$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - 1.}$$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colone j de la matrice J_n^2 est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

et donc

$$\boxed{J_n^2 = J_n.}$$

4. La matrice J_n est symétrique réelle et est donc diagonalisable. En particulier, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de J_n est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

D'après la question 3., le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de J_n et on sait que les valeurs propres de J_n sont à choisir parmi les racines de ce polynôme c'est-à-dire 0 et 1. La question 2 montre que 0 est valeur propre de J_n et que le sous-espace propre associé, à savoir $\mathrm{Ker}(J_n)$, est de dimension $n - 1$. On en déduit que 0 est valeur propre de J_n d'ordre $n - 1$. Il manque une valeur propre qui ne peut être que 1, nécessairement valeur propre simple.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ d'ordre } n-1 \text{ et } 1 \text{ d'ordre } 1.}$$

5. **(a)** Supposons $M = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\det(M + xJ_n) = \det(xJ_n) = x^n \det(J_n) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ x \text{ si } n = 1 \end{array}\right. .$$

Donc

$$\boxed{\text{si } M = 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R} \text{ si } n \geq 2 \text{ et } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\} \text{ si } n = 1.}$$

(b) Supposons $M = I_n$. $\det(M + 0.J_n) = \det(I_n) \neq 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\det(M + xJ_n) = 0 \Leftrightarrow x^n \det(J_n + \frac{1}{x} I_n) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \in \mathrm{Sp}(J_n) \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 0 \text{ ou } -\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Donc

$$\boxed{\text{si } M = I_n,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{-1\}.}$$

(c) (i) Supposons M inversible. On a vu que 1 est valeur propre de la matrice J_n et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Puisque d'autre part, $J_n v = v$ et que $v \neq 0$, le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ puis $w \in \mathrm{Ker}(M + xJ_n)$. Par suite, $Mw = -xJ_n w = J_n(-xw) \in \mathrm{Im}(J_n)$. Puisque $\mathrm{Im}(J_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur v, Mw est colinéaire à v. Par suite, il existe un réel k tel que $Mw = kv$ ou encore il existe un réel k tel que $w = kM^{-1}v$ et finalement w est colinéaire à $M^{-1}v$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. $(M + xJ_n)w = Mw + xJ_nw = v + xJ_nM^{-1}v = \begin{pmatrix} 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \\ 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \\ \vdots \\ 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \end{pmatrix}$. Par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (M + xJ_n)w = 0 \Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0.}$$

Le début de la question (i) montre que $\text{Ker}(M + xJ_n) \subset \text{Vect}(M^{-1}v)$ et en particulier que $\dim(\text{Ker}(M + xJ_n)) \leq 1$. Par suite, en notant que le vecteur $M^{-1}v$ n'est pas nul puisque M est inversible et $v \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \det(M + xJ_n) = 0 &\Leftrightarrow \text{Ker}(M + xJ_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(M + xJ_n) = \text{Vect}(M^{-1}v) \Leftrightarrow M^{-1}v \in \text{Ker}(M + xJ_n) \\ &\Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, si $\sigma = 0$, l'équation $1 + x\dfrac{\sigma}{n} = 0$ n'admet pas de solution et si $\sigma \neq 0$, l'équation $1 + x\dfrac{\sigma}{n} = 0$ admet une unique solution, le réel $-\dfrac{n}{\sigma}$.

$$\boxed{\text{Si } \sigma = 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \varnothing \text{ et si } \sigma \neq 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{-\frac{n}{\sigma}\right\}.}$$

(d) (i) $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ n'est pas vide car 0 est solution de l'équation $\mathcal{E}$.

(ii) Soit x un réel.

$$x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \det(M + bJ_n + xJ_n) = 0 \Leftrightarrow \det(M + (b + x)J_n) = 0 \Leftrightarrow b + x \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}.$$

On en déduit que l'application $x \mapsto b + x$ réalise une bijection de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ ou encore

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = b + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}.}$$

(iii) Si pour tout réel b, la matrice $M + bJ_n$ n'est pas inversible alors $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R}$. Sinon, il existe un réel b tel que la matrice $M + bJ_n$ soit inversible. Dans ce cas, l'équation $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ admet au plus une solution d'après la question 5. et il en est de même de l'équation $\mathcal{S}_E$ d'éapres la question (ii). La question (i) montre que $\mathcal{S}_E$ contient toujours le nombre 0 et finalement $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ n'est pas inversible, } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}.}$$

6. a) En notant C_1, C_2,...,C_n les colonnes de la matrice M, on a

$$\det(M + xJ_n) = \det(C_1 + \frac{x}{n}v, \ldots, C_n + \frac{x}{n}v).$$

Par n-linéarité, ce déterminant est somme de 2^n déterminants. Certains de ces déterminants contiennent au moins deux fois la colonne $\dfrac{x}{n}v$ et sont donc nuls. Il ne reste alors plus que $n + 1$ déterminants :

$$\det(M + xJ_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \frac{x}{n}v, C_{j+1}, C_n) = \det M + \frac{x}{n}\sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, v, C_{j+1}, C_n).$$

On a montré que la fonction $f : x \mapsto \det(M + xJ_n)$ est une fonction affine.

Plus précisément, soit $i \in [\![1, n]\!]$. En développant $\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \nu, C_{j+1}, C_n)$ suivant sa j-ème colonne, on obtient

$$\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \nu, C_{j+1}, C_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le cofacteur du coefficient de M situé ligne i et colonne j. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \det M + \frac{x}{n} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \Delta_{i,j}.}$$

b) On retrouve ainsi les résultats de la question 5 :

• Si M est inversible, alors $\alpha \neq 0$ et donc l'équation $f(x) = 0$ admet soit exactement une solution si $\beta \neq 0$, soit pas de solution si $\beta = 0$.

• Si M n'est pas inversible, alors $\alpha = 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si $\beta \neq 0$ à savoir 0 et admet tout réel pour solution si $\beta = 0$.

