

## Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

## Epreuve de Mathématiques A MP

Partie I.

1) Puisque la matrice  $F$  n'est pas nulle,  $H$  est l'hyperplan de vecteur normal  $F$ .

2) Soit  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

$$F|X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f_{i,j} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_{i,i} + \sum_{i=2}^n x_{i,1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,n}.$$

3) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $p_H(M)$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'hyperplan  $H$ . D'après le théorème de PYTHAGORE, pour  $U \in H$  on a

$$\|M - U\|^2 = \|M - p_H(M)\|^2 + \|p_H(M) - U\|^2.$$

Mais alors  $\|M - U\|^2 \geq \|M - p_H(M)\|^2$  avec égalité si et seulement si  $U = p_H(M)$ . Ceci montre déjà que  $\inf_{U \in H} \|M - U\| = \min_{U \in H} \|M - U\| = \|M - p_H(M)\|$ . Ensuite, on sait que

$$\|M - p_H(M)\| = p_{\text{Vect}(F)}(M) = \frac{(F|M)}{\|F\|^2} F,$$

et donc

$$d(M, H) = \left\| \frac{F|M}{\|F\|^2} F \right\| = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(M, H) = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

4)  $\|F\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} f_{i,j}^2} = \sqrt{n + 2(n-1)} = \sqrt{3n-2}.$

$$\|F\| = \sqrt{3n-2}.$$

5) a) On a déjà

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes  $C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$  de  $B$  sont nulles et donc  $\text{rg}(B) \leq 2$ . Les colonnes  $C_1$  et  $C_n$  sont linéairement indépendantes et donc  $\text{rg}(B) \geq 2$ . Finalement

$$\text{rg}(B) = 2.$$

b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nouveau les colonnes  $C'_2, C'_3, \dots, C'_{n-1}$  de  $B^2$  sont nulles et les colonnes  $C'_1$  et  $C'_n$  sont linéairement indépendantes et donc  $\text{rg}(B^2) = 2$ .

$$\boxed{\text{rg}(B^2) = \text{rg}(B) = 2.}$$

c) Notons  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Puisque les colonnes  $C_2, \dots, C_{n-1}$  de  $B$  sont nulles, on a  $\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \subset \text{Ker}(g)$ . Mais d'autre part,  $\dim(\text{Ker}(g)) = n - \text{rg}(B) = n - 2$  et donc

$$\text{Ker}(g) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}).$$

D'autre part, (en identifiant un élément de  $\mathbb{R}^n$  et un vecteur colonne)  $\text{Im}(g) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(C_1, C_n) = \text{Vect}(e_2 + e_3 + \dots + e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$ . Donc

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(u_1, u_2) \text{ où } u_1 = e_2 + e_3 + \dots + e_n \text{ et } u_2 = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}.$$

Montrons alors que  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + \mu u_2 \in \text{Ker}(g) &\Leftrightarrow \lambda(e_2 + e_3 + \dots + e_n) + \mu(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}) \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + \dots + (\lambda + \mu)e_{n-1} + \lambda e_n \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$  (1). Mais d'autre part, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^n)$  (2). De (1) et (2) on déduit

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g).}$$

d) La famille  $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_{n-1}, u_1, u_2)$ , obtenue en réunissant une base de  $\text{Ker}(g)$  et une base de  $\text{Im}(g)$ , est donc une base de  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $\text{Im}(g)$  est stable par  $g$ , les images de  $u_1$  et  $u_2$  par  $g$  sont des combinaisons linéaires de  $u_1$  et  $u_2$ . Par suite la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est du type  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  où  $B'$  est une matrice carrée de format 2. D'autre part  $B$  est

de rang 2 et donc  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  est de rang 2 ou encore  $B'$  est de rang 2 (en éliminant les lignes ou les colonnes de 0).  $B'$  est ainsi une matrice de format 2 et de rang 2 et donc une matrice de format 2 inversible.

Enfin, les matrices  $B$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  sont les matrices de  $g$  dans des bases différentes et donc ces matrices sont semblables.

e)  $\text{Tr}(B) = 0$  et  $\text{Tr}(B^2) = 2$ . Maintenant  $B$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  et donc  $\text{Tr}(B) = \text{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \text{Tr}(B')$ .

D'autre part, un calcul par blocs montre que  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B'^2 \end{pmatrix}$  et donc  $\text{Tr}(B^2) = \text{Tr}(B'^2)$ . Ainsi

$$\text{Tr}(B') = 0 \text{ et } \text{Tr}(B'^2) = 2.$$

Maintenant, la matrice  $B'$  a deux valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  notées  $\lambda$  et  $\mu$ . On sait que  $\text{Tr}(B) = \lambda + \mu$  et  $\text{Tr}(B^2) = \lambda^2 + \mu^2$ . Or

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2\lambda^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

**Les valeurs propres de  $B'$  sont simples, égales à  $-1$  et  $1$ .**

f) Le polynôme caractéristique de B est celui de  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  et donc

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} -X I_{n-2} & 0 \\ 0 & B' - X I_2 \end{pmatrix} = (-X)^{n-2} \chi_{B'} = (-X)^{n-2} (X-1)(X+1).$$

Mais alors

$$\chi_F = \chi_{I_n+B} = \det(I_n + B - X I_n) = \det(B - (X-1)I_n) = \chi_B(X-1) = (-X+1)^{n-2}(X-2)(X).$$

Les valeurs propres de F sont donc 1 d'ordre  $n-2$  et 0 et 2 d'ordre 1. Puisque 0 et 2 sont des valeurs propres simples, les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. D'autre part, D'après la question a), la matrice  $F - I_n$  est de rang 2 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension  $n-2$ .

Les valeurs propres de F sont donc 1 d'ordre  $n-2$  et 0 et 2 d'ordre 1.  
La dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

6) On a vu que

$$d(P({}^tF), H) = \frac{|(F|P({}^tF))|}{\|F\|} = \frac{|(F|P({}^tF))|}{\sqrt{3n-2}}.$$

Calculons  $(F|P({}^tF))$ .

$$(F|P({}^tF)) = \text{Tr} \left( {}^tF \left( \alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^k \alpha_i ({}^tF)^i \right) \right) = \text{Tr} \left( \sum_{i=0}^k \alpha_i ({}^tF)^{i+1} \right) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \text{Tr}(({}^tF)^{i+1}).$$

On sait alors que  $\text{Tr}(({}^tF)^{i+1}) = \text{Tr}(F^{i+1})$  puis que  $\text{Tr}(F^{i+1})$  est la somme des valeurs propres de  $\text{Tr}(F^{i+1})$ . Donc

$$\text{Tr}(F^{i+1}) = 1^{i+1} + \dots + 1^{i+1} + 0^{i+1} + 2^{i+1} = (n-2) \times 1^{i+1} + 2^{i+1}.$$

Par suite,

$$(F|P({}^tF)) = \sum_{i=0}^k \alpha_i ((n-2) \times 1^{i+1} + 2^{i+1}) = (n-2) \sum_{i=0}^k \alpha_i 1^i + 2 \sum_{i=0}^k \alpha_i 2^i = (n-2)P(1) + 2P(2).$$

Finalement,

$$d(P({}^tF), H) = \frac{|(n-2)P(1) + 2P(2)|}{\sqrt{3n-2}}.$$

### Partie II.

On note  $\| \cdot \|$  la norme sur E.

1) a) Soit  $x_0 \in E$ . Par définition  $d(x_0, H) = \inf_{y \in H} \|x_0 - y\|$ . Mais alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in H / d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_\varepsilon\| < d(x_0, H) + \varepsilon$ . En particulier  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in H / d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$ . Comme  $\frac{1}{n+1}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de H telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$ .

Il existe une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de H telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$ .

b) Il existe un rang  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0, \|y_n - x_0\| \leq d(x_0, H) + 1$ . Soit  $n \geq n_0$ .

$$\|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\| \leq d(x_0, H) + 1 + \|x_0\|.$$

Mais alors la suite  $(y_n)_{n \geq n_0}$  est bornée. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de cette suite et donc de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente. On note  $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  cette sous-suite.

Puisque  $E$  est de dimension finie, la forme linéaire  $h$  est continue sur  $E$  et puisque  $H = \text{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$ ,  $H$  est un fermé de  $E$  en tant qu'image réciproque d'un fermé de  $\mathbb{R}$  par une application continue.

Puisque  $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente d'éléments de  $H$  et que  $H$  est fermé, sa limite est dans  $H$ .

c) La suite  $(\|x_0 - y_{\varphi(n)}\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de la suite  $(\|x_0 - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  et donc converge et a pour limite  $d(x_0, H)$ . Renotons  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite  $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

La suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $H$ , convergeant vers un certain  $y_0$  de  $H$  et vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - z_n\| = d(x_0, H)$ .

Mais alors, par continuité de la norme,

$$d(x_0, H) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - z_n\| = \|x_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

$$\forall x_0 \in E, \exists y_0 \in H / d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\|.$$

2) a) Puisque la forme linéaire  $h$  est continue sur  $E$  et que  $H = \text{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$ ,  $H$  est un fermé de  $E$  en tant qu'image réciproque d'un fermé de  $\mathbb{R}$  par une application continue.

b) Supposons  $h$  non continue. On sait alors que  $h$  n'est pas continue en 0. Par suite  $\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists u_\alpha \in E / (\|u_\alpha\| < \alpha \text{ et } |h(u_\alpha)| = |h(u_\alpha) - h(0)| \geq \varepsilon)$  (\*).  $\varepsilon$  est dorénavant ainsi fixé.

D'après (\*), pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in E$  tel que  $\|u_n\| < \frac{1}{n+1}$  et  $\|h(u_n)\| \geq \varepsilon$ . En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}, h(u_n) \neq 0$

et pour chaque  $n$  on peut poser  $t_n = \frac{1}{h(u_n)} u_n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $h(t_n) = \frac{1}{h(u_n)} h(u_n) = 1$ . Mais d'autre part, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\|t_n\| = \frac{1}{|h(u_n)|} \|u_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon(n+1)},$$

et en particulier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ .

$$\text{Si } h \text{ n'est pas continue sur } E, \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} / \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0 \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

Pour chaque  $n$ , on a alors  $h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ . Par suite, pour chaque  $n$  le vecteur  $t_n - t_0$  est dans  $H$  ou encore la suite  $(t_n - t_0)$  est une suite d'éléments de  $H$ . Cette suite est de plus convergente vers  $-t_0$ . Mais le vecteur  $-t_0$  n'est pas dans  $H$  car  $h(-t_0) = -1 \neq 0$ .

En résumé, la suite  $(t_n - t_0)$  est une suite convergente d'éléments de  $H$  dont la limite n'est pas dans  $H$  ce qui montre que  $H$  n'est pas fermé. Par contraposition, on a montré que si  $H$  est fermé alors  $h$  est continue sur  $E$ .

$$\text{Si } H \text{ est un fermé de } E \text{ alors } h \text{ est continue sur } E.$$

c) Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Tout d'abord  $\overline{H} \neq \emptyset$  car  $\overline{H}$  contient  $H$  et en particulier  $0 \in \overline{H}$ . Soient alors  $(x, y) \in \overline{H}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Il existe deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$ , convergentes, de limites respectives  $x$  et  $y$ . Mais alors la suite  $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $H$  (puisque  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ), convergente, de limite  $\lambda x + \mu y$ , ce qui montre que  $\lambda x + \mu y \in \overline{H}$ . On a montré que

$$\text{si } H \text{ est un hyperplan de } E, \overline{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

d) Soient  $H$  un hyperplan de  $E$  puis  $h$  une forme linéaire non nulle telle que  $H = \text{Ker}(h)$ .

- Si  $h$  est continue sur  $E$ , alors  $H$  est fermé et donc  $\overline{H} = H$ .
- Si  $h$  n'est pas continue,  $\overline{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant strictement l'hyperplan  $H$  et donc  $\overline{H} = E$ .

### Partie III.

Dans cette partie  $\| \cdot \|$  désigne la norme hilbertienne associée au produit scalaire  $( \cdot | \cdot )$ .

1) Soit  $x \in H^\perp$ . Alors  $\forall y \in H, (x|y) = 0$ . Soit  $z \in E$ . Puisque  $E = \overline{H}$ , il existe une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ . On sait alors que la forme linéaire  $y \mapsto (x|y)$  est continue sur  $E$  pour la norme  $\| \cdot \|$  et donc

$$(x|z) = (x| \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x|y_n) = 0.$$

Ainsi un vecteur de  $H^\perp$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$  et finalement

$$H^\perp = \{0\}.$$

2) Mais alors immédiatement

$$H \oplus H^\perp = H.$$

3) Soit  $x \in E$ . Puisque  $\overline{H} = E$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists y \in H / \|x - y\| < \varepsilon$  ce qui montre immédiatement que  $d(x, H) = 0$ .

$$\forall x \in E, d(x, H) = 0.$$

4) Soit  $x \in E$ . Si  $d(x, H)$  est atteinte, il existe un vecteur  $y \in H$  tel que  $\|x - y\| = d(x, H) = 0$ . Mais alors,  $x = y \in H$ .  
Donc

$$\text{si } x_0 \notin H, d(x, H) \text{ n'est pas atteinte.}$$

#### Partie IV.

1) a) Soit  $x_0 \in E$ . Pour tout vecteur  $t$  de  $E$  on a  $|h(t)| \leq \|t\| \times \|h\|$ . En particulier, pour  $y \in H$ ,

$$|h(x_0)| = |h(x_0) - h(y)| = |h(x_0 - y)| \leq \|x_0 - y\| \times \|h\|,$$

et finalement, puisque  $\|h\| > 0$ ,  $\|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ .

$$\forall x_0 \in E, \forall y \in H, \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}.$$

b)  $\frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$  est donc un minorant de  $\{\|x_0 - y\|, y \in H\}$  et puisque  $d(x_0, H)$  est le plus grand des minorants de cet ensemble,

on a donc  $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ .

$$\forall x_0 \in E, d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}.$$

c) Soit  $x_0 \in E$ .

- Si  $x_0 \in H$ ,  $d(x_0, H) \leq \|x_0 - x_0\| = 0$  et donc  $d(x_0, H) = 0$ .
- Si  $x_0 \notin H$ , alors  $h(x_0) \neq 0$  et donc  $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|} > 0$ . En particulier,  $d(x_0, H) \neq 0$ .

En résumé

$$\forall x_0 \in E, (d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H).$$

d) Soit  $x_0 \notin H$ . Par définition,  $h(x_0) \neq 0$ .

$\alpha$ ) Puisque  $\|h\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}$ , pour tout entier  $n$ , il existe  $w_n \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\|h\| - \frac{1}{n+1} < \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \|h\|$ .  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est alors une suite de vecteurs tous non nuls tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \|h\|$ .

$\beta$ ) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $\lambda_n = \frac{h(w_n)}{h(x_0)}$  puis  $y_n = w_n - \lambda_n x_0$ . Par définition,  $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$ . D'autre part,

$$h(y_n) = \lambda_n h(x_0) - h(w_n) = \frac{h(w_n)}{h(x_0)} h(x_0) - h(w_n) = 0,$$

ce qui montre que  $y_n \in H$ . Notons que  $\lambda_n$  peut être nul (si  $w_n \in H$ ).

$$\forall x_0 \notin H, \exists (\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H / w_n = \lambda_n x_0 + y_n.$$

γ) Le résultat est clair si  $w_n \in H$ . Sinon,  $\lambda_n \neq 0$  et donc

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n| \times |h(x_0)|}{\|\lambda_n x_0 + y_n\|} = \frac{\times |h(x_0)|}{\|x_0 + \frac{1}{\lambda_n} y_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)},$$

car  $\frac{1}{\lambda_n} y_n \in H$  et donc  $\|x_0 + \frac{1}{\lambda_n} y_n\| \geq d(x_0, H) > 0$ . Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

e) Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\|h\| \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$  ou encore  $d(x_0, H) \leq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ . En récupérant le résultat de la question 1)b), on a montré que si  $x_0 \notin H$ ,  $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ . Ce résultat est encore valable si  $x_0 \in H$  d'après la question 1)c) et finalement

$$\forall x_0 \in E, d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}.$$

2) a) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,  $\frac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ . Comme la série géométrique de terme général  $\frac{1}{2^n}$  converge, on en déduit que la série de terme général  $\frac{u_n}{2^{n+1}}$  est absolument convergente et en particulier convergente.

b) La fonction  $h$  est donc effectivement une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $h$  est linéaire. Soient  $(u, v) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$h(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n + \mu v_n}{2^{n+1}} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = \lambda h(u) + \mu h(v).$$

$h$  est donc une forme linéaire sur  $E$ . Montrons que  $h$  est continue sur  $E$ . Soit  $u \in E$ .

$$|h(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty.$$

Ainsi,  $\forall u \in E \setminus \{0\}$ ,  $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1$ . On en déduit que

$$h \text{ est une forme linéaire continue sur } E \text{ et } \|h\| \leq 1.$$

c) Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Comme d'autre part,  $\|v_p\|_\infty = 1$ , on a donc  $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$ . Par suite

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1.$$

On sait déjà que  $\|h\| \leq 1$ . Mais d'autre part, par définition de  $\|h\|$ , pour tout entier  $p$  on a  $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq \|h\|$  et quand  $p$  tend vers  $+\infty$  on obtient  $1 \leq \|h\|$ . Finalement

$$\|h\| = 1.$$

d) Soit  $u \in E$ . On a

$$|h(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty.$$

Supposons de plus que  $\|h\| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$  ou ce qui revient au même telle que  $|h(u)| = \|u\|_\infty$ . Alors chacune des deux inégalités ci-dessus doit être une égalité ce qui impose à la suite  $u$  d'être de signe constant puis à chaque  $|u_n|$  d'être égal à  $\|u\|_\infty$ . En résumé, la suite  $u$  est nécessairement constante. Comme  $u$  doit avoir une limite nulle en  $+\infty$ ,  $u$  est nécessairement la suite nulle. Finalement, il existe pas d'élément  $u$  non nul de  $E$  tel que  $\|h\| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$ .

e)  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle et continue sur  $E$  et donc un hyperplan fermé de  $E$  d'après la question II.2)a).

f) Soit  $u \notin H$ . Si la distance de  $u$  à  $H$  est atteinte, alors il existe  $v \in H$  (et donc  $u - v \neq 0$ ) telle que

$$\|u - v\|_\infty = d(u, H) = \frac{|h(u)|}{\|h\|} = \frac{|h(u) - h(v)|}{\|h\|} = \frac{|h(u - v)|}{\|h\|}.$$

$u - v$  est alors un vecteur non nul tel que  $\|h\| = \frac{|h(u - v)|}{\|u - v\|_\infty}$  ce qui contredit le résultat de la question d) et donc

si  $u \notin H$ ,  $d(u, H)$  n'est pas atteinte.